Matematisk modellering: Hvor tidligt står Venus op?

Kasper Bjering Søby Jensen, ph.d.-studerende i matematikkens didaktik ved Roskilde Universitet

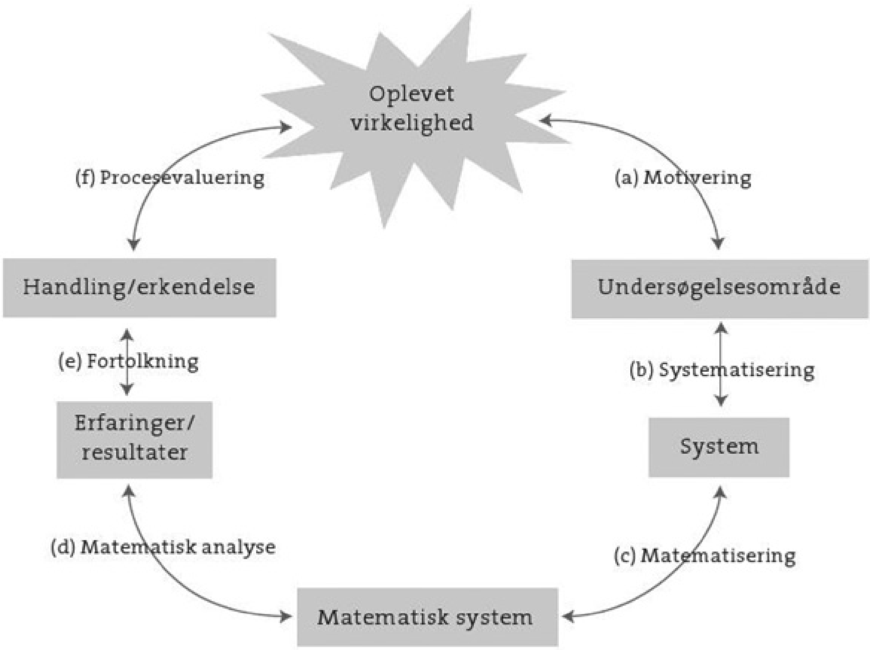
I LMFK–bladet 2/2012 bragtes artiklen *"Anvendelse og modellering i matematik – et teoretisk blik"* fra min hånd. I artiklen præsenterede jeg begrebet "fuldbyrdet modellering", som dækkende over en matematisk aktivitet, hvor den i artiklen præsenterede "modelleringscirkel" aktiveres i sin helhed, se figur 1. Formålet med denne artikel er at give et mere omfattende eksempel på udfoldelse af en matematisk modelleringsproces.

Almen undervisning i matematik kan oplagt have som mål at bringe de underviste i stand til i almindelighed at kunne aktivere matematik i de situationer, som tilværelsen bringer dem i. Meget erfaring og forskning siger, at en traditionel træning i algoritmer, som den, der afprøves i typeopgaverne ved skriftlig eksamen (med eller uden anvendt indpakning), ikke lærer eleverne at bruge matematik i andre situationer end netop ved opgaveregning i undervisningssammenhæng.

Det er derfor oplagt, at et centralt element i matematikundervisning må være at bringe elever i situationer, hvor de selv må udfolde matematisk modellering i fuldt omfang. Som paradigmatisk eksempel på en ikke–matematisk situation, hvor matematisk modellering kan bidrage til at søge et svar, stillede jeg som afslutning på min tidligere artikel følgende "opgave":

»Jeg er et A–menneske. For et par år siden gik jeg en efterårsmorgen ved 6–tiden fra Trekroner station mod min arbejdsplads RUC. Mod øst stod Venus – morgenstjernen – smukt ved den gryende solopgang. Jeg spurgte mig selv: Venus befinder sig mellem Solen og Jorden og ses derfor altid tæt ved solopgang eller –nedgang. Hvor tidligt står Venus egentlig op? Det må kunne undersøges med matematisk modellering«.

Figur 1
Modelleringscirklen er en model af en matematisk modelleringsproces, se gennemgang i artikel i LMFK–bladet 2/2012.



Ydre modellering

Teksten beskriver det, der i modelleringscirklen kaldes for en "oplevet virkelighed". Modelleringens første proces er en "motivation", hvor der fra den oplevede virkelighed afgrænses et "undersøgelsesområde". Konkret er det her problemstillingen: *Hvor tidligt står Venus op?* I sig selv er det jo en ikke–matematisk problemstilling. Og det er slet ikke på forhånd givet, hvordan et matematisk arbejde kan bidrage til svaret, endsige om det overhovedet kan. Første opgave er altså at afgrænse hvilke typer af svar, vi vil kunne forvente af en matematisk tilgang til problemet.

Erfaring vil almindeligvis nok sige, at en simpel matematisk model sjældent er velegnet til at give meget præcise svar på meget specifikke spørgsmål. Hvornår Venus står op over København den 14. maj 2014, er et svært spørgsmål at besvare ved (simpel) modellering[1].

Simple modeller vil i stedet ofte give svar af mere overordnet karakter. I denne situation kunne et bud være et svar på spørgsmålet: "Hvor meget tidligere end solen, står Venus op?". Eller mere overordnet: "Hvad er den størst mulige tidsforskel mellem Venus–opgang og solopgang?"

Efter denne afgrænsning kan man begynde en "systematisering" af undersøgelsesområdet. Groft sagt betyder det, at man udvælger de træk ved situationen, som skal indgå i modellen. I et første modelleringsforsøg vil det typisk være nogle få træk, som kan forventes at være de mest afgørende.

De valgte træk skal ligeledes have det kendetegn, at de skal kunne *matematiseres*, dvs. oversættes til objekter der kan behandles matematisk. Ofte vil det sige, at de skal kunne beskrives kvantitativt. Valget af træk er samtidigt et valg af, hvad der er *kendte størrelser* i modellen, samt hvilke størrelser i modellen, der skal udtrykkes ved det kendte.

For undersøgelsen her vil en elev måske, fx fra fysik C eller grundskolen, kunne genkalde sig den simple model af Solsystemet, hvor planeterne bevæger

[1] I stedet kan oplysningen søges via eksempelvis gratisprogrammet Stellarium. Svaret er i øvrigt ca. kl. 4.15.

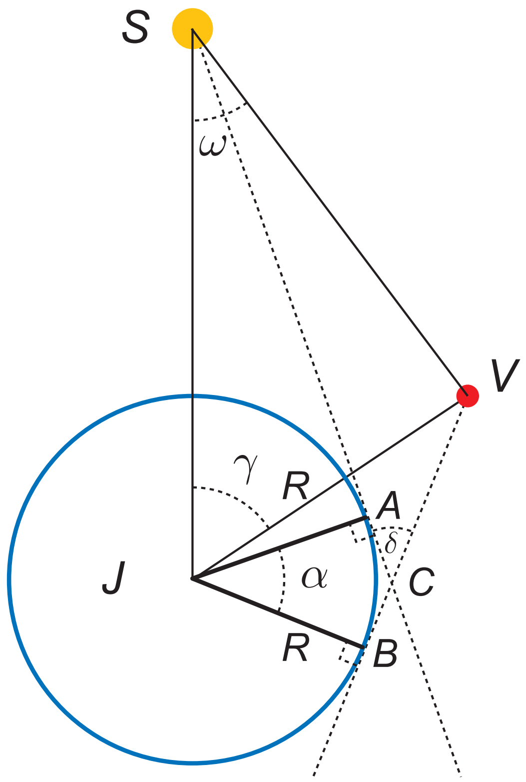
sig i koncentriske cirkulære baner, med Solen i centrum. Et opslag kan minde om, at Venus ligger mellem Solen og Jorden.

Matematisk set peger det mod en *plangeometrisk* model, hvor solsystemet repræsenteres ved et plan, der indeholder Venus og Jordens baner som koncentriske cirkler, samt Solen, Venus og Jorden som punkter, placeret hhv. i centrum og på hver af de to cirkler.

Næste skridt kunne være at overveje, hvad en solopgang vil sige i modellen. Overvejelser kan her føre til erkendelsen af, at himmellegemers "opgang" har at gøre med Jordens rotation. For at denne bliver en del af modellen, kan man lade Jorden repræsentere af en "roterende" cirkel.

En observatør står således i et punkt på den roterende cirkels periferi og vil observere et himmellegemes opgang, når vedkommende når berøringspunktet for den tangent til jord–cirklen, som går gennem det punkt, der repræsenterer himmellegemet. Det er således den tid, det tager en observatør at bevæge sig fra punktet med Venus–opgang til punktet med solopgang, der skal findes. En principskitse af modellen ses på figur 2.

De størrelser, som der oplagt kan antages kendt i denne model, er afstanden fra Solen til hhv. Jorden og Venus, Jordens radius og rotationstid samt Jordens og Venus' omløbstid om Solen. Med lidt analyse af skitsen ses det, at svaret på tidsforskydningen T mellem Venus– og solopgang må være $T = (\alpha/2\pi)\cdot 24$ timer. Den egentlige matematiske opgave er således at bestemme α som funktion af de kendte størrelser.



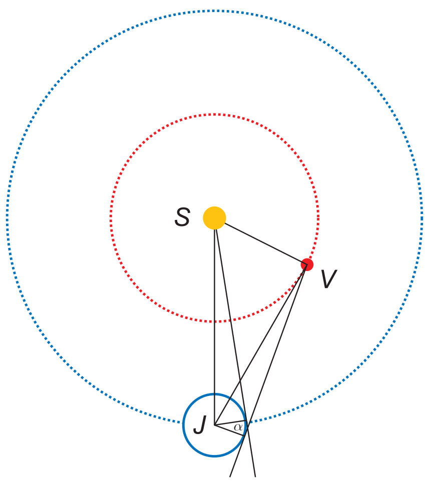
Figur 3
Det matematiske system, der gøres til genstand for en matematisk analyse.

Indre modellering

Når foregående afsnit hed "ydre modellering", skyldes det, at arbejdet i hovedsagen foregik i et ikke–matematisk domæne eller på grænsen til det matematiske. Det betyder ikke, at det ikke var en del af en *matematisk* modellering, for hele processen måtte styres af netop hensynet til, at vi skal ende op med en *matematisk* model.

Dette afsnit hedder "indre modellering", fordi der her gennemføres en matematisering af principskitsen på figur 2. Dette giver anledning til et matematisk system i form af en plangeometrisk figur, hvor på der kan laves mange forskellige matematiske undersøgelser. På figur 3 ses et bud på hvilken figur, man kunne forestille sig at komme frem til. Mere præcist en figur, der viser, hvor jeg selv endte. Herefter overgår man til modelleringsfasen "matematisk analyse".

De kendte størrelser i det matematiske system er $|SJ|$, $|SV|$ og R. Tangentlinjen gennem S rører cirklen i A og kaldes l_{SA}, mens tangentlinjen gennem V rører i punktet B og kaldes l_{VB}. Linjerne l_{SA} og l_{VB} skærer hinanden i punktet C. Fra geometrien ved vi, at JA står vinkelret på l_{SA} og JB på l_{VB}. Det er nu af forskellige veje muligt at indse (bevise), at $\angle AJB$ er lig $\angle SCV$ – dvs. $\alpha = \delta$.



Figur 2
En systematisering, hvor få centrale træk ved situationen er valgt ud til modellen.

Man kan endvidere overbevise sig om, at ΔSJV er meget tæt på at være kongruent med ΔSCV, når afstanden fra V til l_{SA} er meget større end R. De tilfælde, hvor det gælder, kan man altså sige at $\angle SJV \approx \angle SCV = \angle AJB$, dvs. $\gamma \approx \delta = \alpha$. De situationer, hvor dette ikke gælder, vil A og B være næsten sammenfaldende. Solen og Venus vil altså stå op næsten samtidigt. Vinklen γ indgår i ΔSJV, hvor vi kender længden af to sider. Vi skal altså kende et stykke mere i trekanten for at kunne bestemme γ. En mulighed er som sagt at søge T_{max} svarende til når γ er størst. Her vil forskellige både stringente og intuitive undersøgelser af figur 2 kunne vise, at det er γ når l_{VB} er tangent til Venus' bane. I det tilfælde må $\angle SVB$ være ret. Da R er meget mindre end $|VJ|$ og $|VB|$ er $\angle SVB \approx \angle SVJ$. ΔSJV kan altså antages retvinklet med kendt hypotenuselængde $|SJ|$ og kendt længde af α's modstående katete, $|SV|$. Deraf følger[2]:

---

[2] Idet jordens baneradius er 1 AE og Venus' er ca. 0,72 AE.

$$sin(\alpha) = \frac{|SJ|}{|SV|} = 0{,}72$$

$$\Leftrightarrow \ \alpha = 0{,}803$$

Og deraf følger, at den eftersøgte tidsforskel er: $T = (0{,}803/2\pi)\cdot 24$ timer ≈ 3 timer 4 min.

En anden mulighed er at ville bestemme γ som funktion af ω, dvs. vinklen mellem sigtelinjerne fra Solen til hhv. Jorden og Venus. I så fald bliver opgavens svar en funktion $\alpha(\omega)$. Man får da først med cosinusrelationen:

$$|JV| = \sqrt{|SJ|^2 + |SV|^2 - 2|SJ||SV|\cdot cos(\omega)}$$

Og derefter fås med sinusrelationen:

$$\alpha(\omega) = sin^{-1}\left(\frac{|SV|\cdot cos(\omega)}{|JV|}\right)$$

$$= sin^{-1}\left(\frac{|SV|\cdot cos(\omega)}{\sqrt{|SJ|^2 + |SV|^2 - 2|SJ||SV|\cdot cos(\omega)}}\right)$$

Da det imidlertid ikke i almindelighed er så nemt at bestemme en værdi af vinkel ω til at sætte ind i formlen, vil det være oplagt i stedet at søge et udtryk, hvor en mere præcis dato kan sættes ind.

Da vi kender Jordens og Venus' omløbstider om Solen (hhv. 365 og 225 dage), kan vi nemt opstille udtryk for den vinkelafstand, de tilbagelægger over en bestemt tid. Anvendeligheden forudsætter dog et eller andet nulpunkt at regne fra, hvor Jorden og Venus er på linje med Solen. Et sådan har vi netop haft, nemlig Venuspassagen den 6. juni 2012.

Vi lader t repræsentere antal dage efter 6. juni 2012, $x(t)$ Jordens vinkelafstand fra sin position på denne dato og $y(t)$ Venus' ditto. Man indser let følgende to sammenhænge:

$$x(t) = \frac{2\pi}{365}\cdot t$$

$$y(t) = \frac{2\pi}{225}\cdot t$$

Samtidigt må der gælde, at ω er givet som differensen mellem disse to:

$$\omega(t) = y(t) - x(t)$$

$$= \frac{56\pi}{16425}\cdot t \approx 0{,}0107t$$

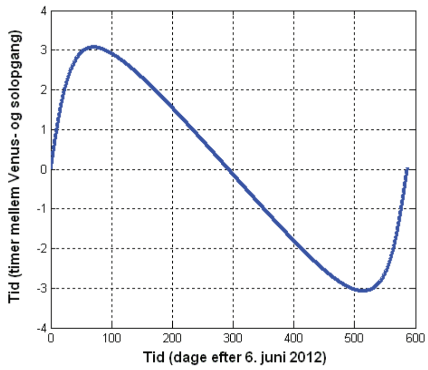
Vi kan nu opstille et samlet udtryk for tidsforskellen T mellem Venus– og solopgang som funktion af antal dage t efter den 6. juni 2012:

$$T(t) = \frac{\alpha(\omega(t))}{2\pi}\cdot 24 \text{ timer}$$

$$= sin^{-1}\left(\frac{|SV|\cdot cos(0{,}0107t)}{\sqrt{|SJ|^2 + |SV|^2 - 2|SJ||SV|\cdot cos(0{,}0107t)}}\right)\cdot\frac{24}{2\pi} \text{ timer}$$

$$= sin^{-1}\left(\frac{0{,}72\cdot cos(0{,}0107t)}{\sqrt{1{,}52 - 1{,}44\cdot cos(0{,}0107t)}}\right)\cdot\frac{12}{\pi} \text{ timer}$$

På figur 4 er funktionen $T(t)$ afbilledet med én periode, som viser sig at være på 587 dage. Det vil sige, at efter 587 dage vil Venus igen "overhale" Jorden (Venus passerer dog over eller under



Figur 4
Graf af en periode af funktionen T(t).

solskiven, hvorfor det ikke er en Venuspassage). På figur 5 ses grafen over lidt længere tid – 10 år.

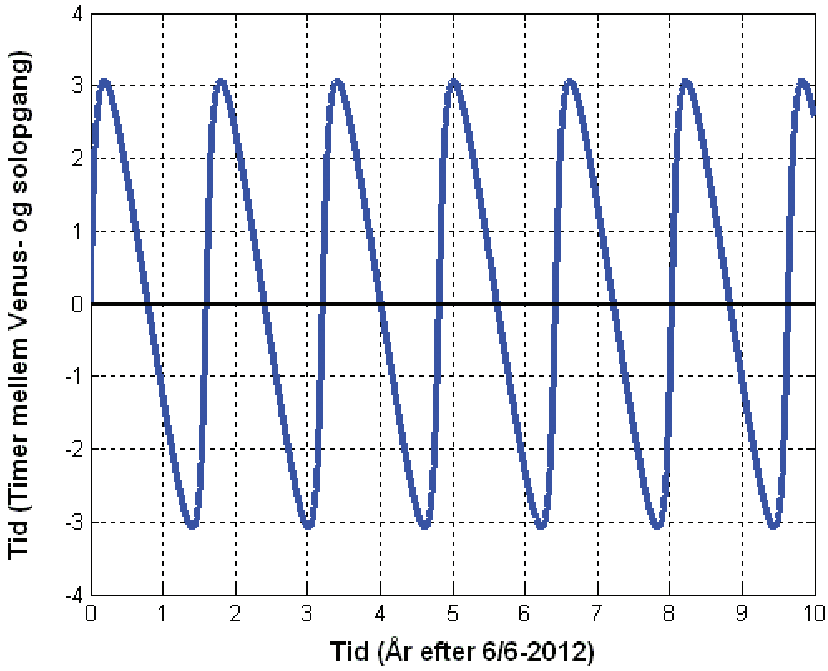
Det næste skridt i modelleringscirklen er "fortolkning". De to grafer giver gode anledninger til dette. Tre eksempler: Hvad betyder kurvens "skæve form" for udviklingen i Venus–opgang og stemmer det med figur 2? Hvad betyder negative værdier af T? Og hvad siger det forhold, at grafen på figur 5 næsten rammer punkterne (4,0) og (8,0), om regelmæssighederne i fænomenet "Venus–passage"?

Model–evaluering

Til fuldbyrdet modellering hører også en kritisk evaluering af modellen med eventuelle justeringer til følge. Der er mindst fire fysiske forhold, som modellen ikke har taget højde for:

- Planetbaner er ikke cirkelformet, men ellipseformet. Begge planetbaners excentricitet er dog tæt på 0. For Jorden er den ca. 0,017 og for Venus ca. 0,007.
- Planetbanerne ligger ikke præcist i samme plan – vinklen mellem Venus' og Jordens baneplaner er ca. 3,4º. Det er derfor Venus oftest "passerer" over eller under solskiven.
- Ækvator ligger ikke i jordens baneplan. Faktisk hælder det ca. 23º i forhold til dette.
- Den vinkel, som Solen og Venus anskues fra, afhænger af, hvilken breddegrad man befinder sig på.

Figur 5
Graf for funktionen T(t) for 10 år.



Alle disse punkter vil i større eller mindre grad betyde, at observationer af Venus og Solen ikke passer sammen med den her opstillede model. Det er således muligt at arbejde videre med, hvad et eller flere af disse punkter har af indflydelse, og om der kan korrigeres i modellen for denne. Mit gæt er, uden at have undersøgt det nærmere, at punkt 1 og 2 har lille betydning for modellens korrekthed, mens punkt 3 og 4 har stor. Både punkt 3 og 4 er ret svære at korrigere for. Men punkt 4 kan man godt undersøge kvalificeret på intuitiv vis. Man kan med fordel starte med at tegne Solen og Venus placering på himlen over horisonten set fra ækvator og nordpolen.

En anden tilgang til evaluering er at holde modellen op imod data. Ifølge modellen indtræffer den største tidsforskydning ca. 72 dage efter Venuspassagen[3]. Med det gratis computerprogram Stellarium kan man observere Venus og Solens placering på himlen, fx ved ækvator[4]. Her kan Venus ses at øge afstanden til Solen frem til omkring 16. august, svarende til 71 dage. På denne dato er forskellen på Venus– og solopgang ca. 3 timer og 9 minutter (kl. 4.51 hhv. 8.00).

Ser vi i stedet på forskellen set fra København, så er største forskel naturligvis på samme dato, men tidsforskellen på Venus– og solopgang er nu 3 timer og 48 minutter (kl. 1.58 hhv. 5.46). Så breddegraden spiller altså en rolle. Det ser dog ud som om modellen faktisk passer ganske fint ved ækvator. Det vil dog kræve yderligere undersøgelser at afgøre dette nøjere.

Didaktiske overvejelser

I forbindelse med mit ph.d–projekt foretog jeg i foråret 2011 en større spørgeskemaundersøgelse blandt et velvalgt udsnit af gymnasieskolens matematiklærere. Ca. 500 blev inviteret til at svare, hvoraf 133 besvarede hele skemaet og ca. 200 svarede på nok til at indgå i mit datamateriale.

I spørgeskemaet blev respondenterne bl.a. bedt om, for en serie på 16 opgaveformuleringer, at vurdere, om man anså opgaven for at være *central* for, en *mulig sideaktivitet* i eller *ikke hjemmehørende* i matematikfaget.
En af opgaverne lød: *"Hvor tidligt står den indre planet Venus op?"*. Hverken mere eller mindre. 174 respondenter svarede, hvoraf 120 (69%) angav, at den ikke hørte hjemme. 52 (30%) angav, at den var en mulig sideaktivitet. Blot 2 (1%) angav, at opgaven repræsenterede noget centralt. 161 (93%) afviste at opgaven kunne stilles ved en 5–timers skriftlig eksamen på gymnasiets højeste niveau, mens 4 (2%) mente, den kunne og 9 (5%) ikke følte sig afklaret omkring dette.

Jeg er klar over, at man skal tolke meget nænsomt på spørgeskemabesvarelser, men mener nu alligevel at kunne tolke en vis grad af afstandtagen til opgaven. Respondenterne havde på alle tidspunkter mulighed for at skrive frie kommentarer, hvilket mange heldigvis benyttede. Blandt de, som afviste opgaven og angav en fri kommentar, går tre typer af begrundelser igen:

1. Respondenten forstår ikke selv opgaven.
2. Respondenten mener ikke opgaven har noget med matematik at gøre – evt. henvises den til undervisning i fysik og/eller astronomi.
3. Respondenten kan ikke lide opgaveformuleringen, fordi den er uoverskuelig, for matematisk kompliceret for eleverne, for uklart formuleret, uløselig pga. for få oplysninger, og lignende.

Begrundelse 2 synes udfordret af denne artikel. Der er ganske meget matematik, der kan aktiveres i besvarelsen. Udregninger, opstilling af algebraiske udtryk, geometrisk ræsonnement, funktionsanalyse, osv. Man kan principielt mene, at en matematikundervisning slet ikke bør handle om Venus eller andre ikke–matematiske objekter. Eller mere moderat, at det at vide noget eller opnå viden om ikke–matematiske objekter ikke hører hjemme. Men at problemstillingen kan gives et meningsfuldt svar ved aktivering af matematik, er der vel næppe yderligere tvivl om.

Begrundelse 3 handler om måden opgaven stilles på. Der er tale om en åben ikke–matematisk opgaveformulering, som kræver selvstændig indhentning af information. Sådanne kan man mene principielt eller af hensyn til eleverne, ikke hører hjemme i matematik. Omvendt kan man hævde, med få undtagelser, at al praktisk anvendelse af matematik sker i sådanne åbne situationer, hvor man selv skal gennemføre en fuldbyrdet modellering. Hvis undervisningen skal afspejle dette – og det er naturligvis en smagssag om den skal – så kommer man ikke udenom ikke–matematiske opgaveformuleringer som er uklare, åbne og ved første øjekast uoverskuelige og uløselige.

Begrundelse 1 er i familie med begrundelse 3, bortset fra, at her er problemet flyttet fra eleven til læreren. Den amerikanske matematikdidaktiker Alan Schoenfeld pegede i 1980'erne på, at gennemsnitseleven i skolen adopterer den forestilling, at enten kan eleven løse matematikopgaven på 5–10 minutter, eller også kan eleven ikke løse den. Blandt lærere findes muligvis en lignende effekt. Enten genkendes opgaven øjeblikkeligt som en type, man kender til, eller også forstår man den ikke.

Men arbejdet med rigtige anvendte problemstillinger vil kun ekstremt sjældent være overstået på 5–10 minutter, og man vil lige så sjældent opleve at have fundet indgangen til besvarelsen blot ved et øjekast. Den her præsenterede model tog mig timers refleksion og vandring ad blindspor at nå frem til. Bare det at afgrænse, hvad der egentlig kan svares på spørgsmålet, vil tage tid for de fleste.

En grundlæggende didaktiske pointe ved at stille opgaver af denne slags er altså at få brudt elevers (og læreres) vaneforestillinger om, hvad matematik er for en disciplin. Hvis undervisning skal efter-

---

[3]Dette kan regnes ud fra:

$$\omega(t) = 0{,}0107t = \pi/2 - 0{,}803$$
$$\Leftrightarrow t = 71{,}8$$

[4]Her skal det understreges, at der naturligvis ikke er tale om empirisk data, men om data fra en anden model. Der er naturligvis også den mulighed at tjekke bagud med registreret data eller lave egne observationer. Fordelen ved Stellarium er fleksibiliteten i tid og sted.

lade det indtryk, at matematik er et vigtigt og brugbart værktøj til at behandle virkelige problemstillinger med, samt at dette kræver mange, lange og svære ræsonnementer, så kommer man næppe udenom åbne anvendte problemer, der inviterer eleven til selvstændig fuldbyrdet modellering.

Til sådanne invitationer vil jeg tilføje tre væsentlige kommentarer:

- Fuldbyrdet modellering er svært. Få kan finde ud af det første gang, de prøver.
- Opgaven skal have form som den står her: *"Hvor tidligt står Venus op"*. Yderligere informationer og bearbejdninger må som udgangspunkt findes og gøres af eleven selv. Læreren skal naturligvis vejlede undervejs. Men en udfoldet opgavetekst, der guider eleven sikkert frem til enkeltstående algoritmiske rutine–eksercitser, vil ikke give indtryk af virkeligt modelleringsarbejde.
- Kontrakten for opgaven skal være klar. Målet er ikke at levere en tekst der formelt set må regnes for et svar på spørgsmålet. Et opslag i Stellarium og svaret "Kl. 4.15 den 14. maj 2014 set fra København" er ikke acceptabelt, selvom det teknisk set er rigtigt. Dette fordi målet ikke er at svare på spørgsmålet, men at demonstrere, at man kan aktivere matematisk kompetence i besvarelsen. Denne kontrakt opstår ikke automatisk, men skal etableres aktivt gennem undervisningen og stiller store krav til lærerens faglige vurdering af besvarelsen.

Jeg håber, at denne artikel sætter nogle tanker i gang derude. Og også gerne at nogen reagerer. Dels på det faglige indhold i artiklen, men også på det didaktiske. Hvilke erfaringer er der med denne type opgave? Hvilke holdninger er der til dem – har de noget at gøre i matematikundervisning?

Jeg tænker i øvrigt, at potentialet for at arbejde med modeller (især geometriske) ud fra spørgsmål om "den nære astronomi", er ganske stort. Her blot et par ideer til, hvad man kunne kaste sig over:

- Hvornår lyser Venus kraftigst på himlen?
- Hvorfor er Merkurpassager hyppigere end Venuspassager? Hvor meget hyppigere er de?
- Hvor stor forskel er der på synligheden af Mars, når den er mest hhv. mindst synlig? Hvad med for Jupiter og Saturn?
- Kan Jorden ses fra Jupiter? Kan den kinesiske mur ses fra Månen?
- Hvorfor virker Solen og Månen omtrent lige store set fra Jorden?
- Hvor langt kan man se langs overfladen på Jorden? På Mars? På en vilkårlig planet?

Og så kan man tænke over endnu en anvendt problemstilling, som jeg vil forsøge at komme med et bud på en modelleringsløsning af i et senere nummer af LMFK–bladet:

Hvordan udvikler befolkningstallet sig i et land med et–barnspolitik?