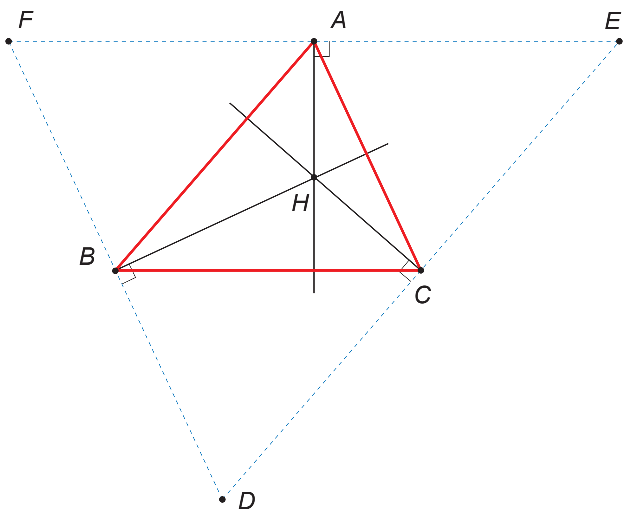
Højdernes skæringspunkt

Jens Carstensen, Tårnby Gymnasium

Der er i plangeometrien flere måder at vise sætningen om, at en trekants højder går gennem samme punkt. Vi ser på et par af dem her.

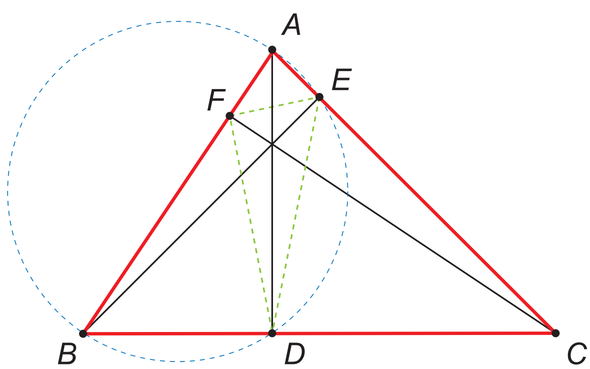
Midtnormaler

Det er (ret) let at vise, at en vilkårlig trekants midtnormaler går gennem samme punkt. Når man derefter skal vise, at også trekantens højder går gennem samme punkt, trækker man traditionelt gennem hver vinkelspids en linje parallel med trekantens modstående side, så ΔDEF opstår. I denne er A, B og C sidemidtpunkter og højderne i ΔABC er så midtnormaler i ΔDEF. Da disse går gennem samme punkt, gælder altså det samme for en trekants højder.



Vinkelhalveringslinjer

Vi kan desuden føre et bevis for, at højderne går gennem samme punkt ved hjælp af vinkelhalveringslinjer. Det er nemlig (ret) let at vise, at en trekants vinkelhalveringslinjer går gennem samme punkt.



Vi viser, at højderne er vinkelhalveringslinjer i den trekant, der er udspændt af højdernes fodpunkter D, E og F.
Vi har, at $\square AEDB$ er indskrivelig, fordi ΔAEB og ΔADB er retvinklede med fælles hypotenuse AB. Midtpunktet af AB er altså centrum for den omskrevne cirkel.

Modstående vinkler i den omskrevne cirkel er supplementvinkler, så

$$\angle BAE + \angle BDE = 180°$$

Desuden er $\angle CDE + \angle BDE = 180°$, og dermed er $\angle BAE = \angle CDE$. På samme måde kan vi se på den omskrevne cirkel for $\square ACDF$ og får, at

$$\angle FDB = \angle BAE$$

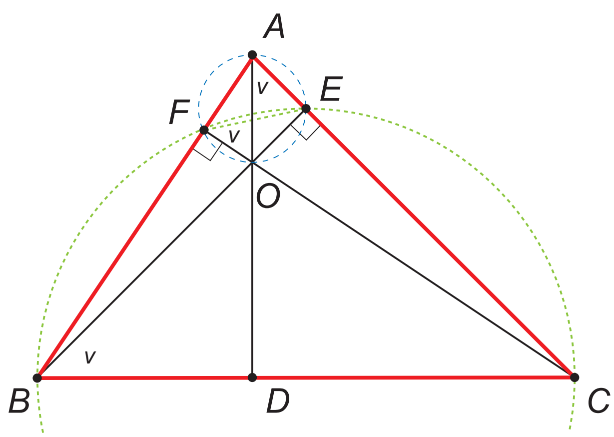
Men så er $\angle FDB = \angle CDE$, hvilket netop betyder, at DA er vinkelhalveringslinje for $\angle FDE$.

Da altså højderne i ΔABC falder sammen med vinkelhalveringslinjerne i ΔDEF, går højderne gennem samme punkt.

Direkte bevis

Et direkte bevis for, at højderne går gennem samme punkt kan føres således: Træk højderne BE og CF. De skærer hinanden i O. Linjen AO skærer BC i D.

Nu er $\square AFOE$ indskrivelig, og centrum for den omskrevne cirkel er midtpunktet af AO. Desuden er $\square BCEF$ indskrivelig og centrum for den omskrevne cirkel er midtpunktet af BC.



Periferivinkler, der spænder over samme cirkelbue, giver

$$\angle DAC = \angle OAE = \angle EFO = \angle EFC = \angle EBC = v$$

Trekanterne ΔADC og ΔBEC har to parvis lige store vinkler, nemlig v og C. De to sidste vinkler i de to trekanter er altså også parvis lige store, dvs. $\angle ADC$ er ret.

Henvisning

Zhonghong Jiang & George E. O'Brien: *Multiple Proof Approaches Mathematical Connections*, (Mathematics Teacher, April 2012).