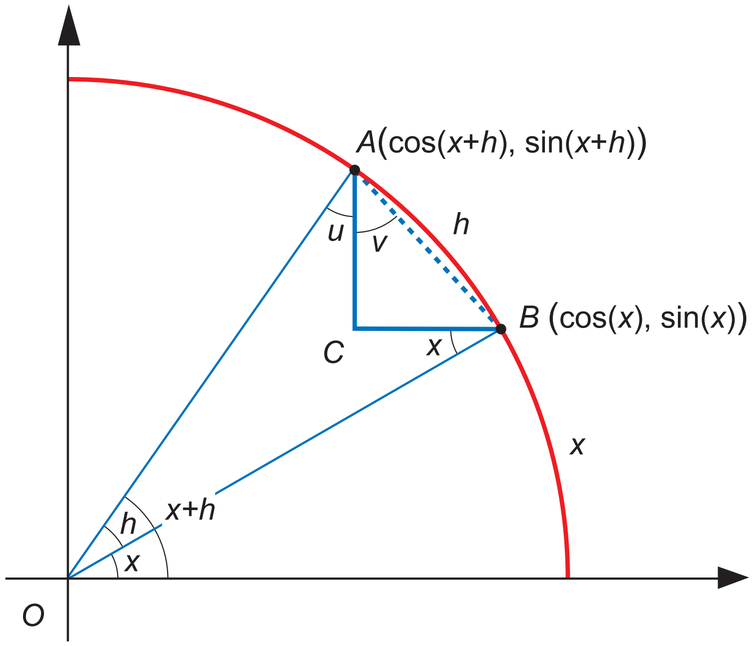
Differentiation af de trigonometriske funktioner

Anders Wamsler, Sorø Akademi



Jeg er formentlig ikke den eneste matematiklærer, der har svært ved at finde balancen mellem de matematiske regler, der skal argumenteres for, og dem, eleverne blot skal præsenteres for som fakta.

Mine elever reagerer forskelligt. Nogle (heriblandt dem, der blot skal overleve med faget) accepterer uden videre hvad som helst, mens andre – og her drejer det sig ikke kun om de matematisk højt begavede – føler sig lige fra starten af rigtig skidt tilpas, når deres egen indsigt i de matematiske begreber, vi beskæftiger os med, er mere eller mindre ligegyldig i visse sammenhænge. Det synes som om, deres forudfattede syn på matematikken rystes i sin grundvold.

Det kommer til udtryk allerede i 1.g, fx når de skal taste *'log'* på lommeregneren uden at kende denne funktions betydning. Eller når de bliver præsenteret for et *"CAS–bevis"*. Jeg har vanskeligt ved at sidde disse elevers frustrationer overhørigt – og samtidig påpege fagets deduktive karakter.

Mit kompromis er at synliggøre argumentationerne i videst muligt omfang. En del via opgaver (evt. frivillige). Dog giver jeg gerne afkald på den matematiske detaljepræcision, som prægede matematikundervisningen i 60'erne. Det væsentlige er, at eleverne kan se, hvordan tingene hænger logisk sammen – ikke at man præcis definerer grænseovergange ved ε–δ–formularer, og heller ikke at man gennemgår alle mulige varianter af en given situation.

I denne sammenhæng har differentiationen af de trigonometriske funktioner længe været en anstødssten. Skal vi virkelig inddrage (og bevise) additionsformlerne for at kunne argumentere for disses differentialkvotienter?

Nu er jeg imidlertid omsider stødt på en alternativ udledning af disse differentialkvotienter, som andre måske også kan bruge. Her gengives udledningen vha. opgaver, som er stillet i forbindelse med en studieretningsopgave om svingninger. De må også kunne bruges som del af et projektforløb.

Differentiation af sinus og cosinus

Inden vi går i gang med differentiationen, bemærkes det (uden bevis), at forholdet mellem kordelængden og den tilsvarende buelængde vil nærme sig 1, når vinklen (eller buelængden) nærmer sig 0.

På tegningen til højre vil således $\frac{h}{|AB|} \to 1$ når $h \to 0$.

Ved hjælp af tegningen kan vi nu bestemme differentialkvotienterne til cosinus og sinus via løsningen af nedenstående øvelser.

Herved findes disse differentialkvotienter dog kun for x mellem 0 og $\pi/2$, men samme idé kan bruges hele cirklen rundt, så konklusionerne vil gælde for alle x.

A og B er retningspunkter for vinklerne $x+h$ og x, som regnes i radiantal, hvorfor de svarer til de tilsvarende buelængder på enhedscirklen.

Punktet C er afsat, så ΔABC er en retvinklet trekant med kateterne parallelle med akserne.

Opgave 1
Gør rede for, at $\angle OBC = x$.

Opgave 2
Vis, at $v = x + \frac{h}{2}$ ved at udnytte, at ΔOAB er ligebenet.

Opgave 3
Vis, at

$$\cos(v) = \frac{\sin(x+h)-\sin(x)}{|AB|} = \frac{\sin(x+h)-\sin(x)}{h}\cdot\frac{h}{|AB|}$$

Opgave 4
Brug resultaterne fra opgave 2 og 3 til at bestemme differentialkvotienten for sinus.

Opgave 5
Opstil en formel for $\sin(v)$ i stil med den for $\cos(v)$ i opgave 3, og bestem ved hjælp heraf differentialkvotienten for $\cos(v)$.

Opgave 6
Brug omskrivningen

$$\frac{\sin(\omega\cdot(x+h))-\sin(\omega\cdot x)}{h} = \frac{\sin(\omega\cdot x+\omega\cdot h))-\sin(\omega\cdot x)}{\omega\cdot h}\cdot\omega$$

til at bestemme differentialkvotienten for $f(x) = \sin(\omega\cdot x)$.

Opgave 7
Brug geometriske argumenter til at beskrive, hvilken indflydelse φ og h vil have ved differentiation af en harmonisk svingning.