Ellipsetangenter, 2

ALIJA MUMINAGIĆ, Nykøbing F. & JENS CARSTENSEN, Tårnby Gymnasium

Vi har i forrige nummer af LMFK–bladet set på egenskaber ved ellipsetangenter, og vi angiver her endnu en smuk egenskab ved den almindelige ellipsetangent.

Sætning

Ellipsen med halvakser a og b og brændpunkter F_1 $(-ae, 0)$ og F_2 $(ae, 0)$ har en tangent i punktet A (x_1, y_1). De ydre røringscirkler for siderne AF_1 og AF_2 i ΔAF_1F_2 har centrer S og T på skæringspunkterne mellem ellipsetangenten i A og de lodrette tangenter i ellipsens toppunkter C $(-a, 0)$ og D $(a, 0)$. For røringscirklernes radier r_1 og r_2 gælder desuden, at $r_1 \cdot r_2 = b^2$.

Bevis

Omkredsen af ΔAF_1F_2 er

$$F_1F_2 + (AF_1 + AF_2) = 2ae + 2a$$

Da afstanden fra F_2 til røringspunktet for den ydre røringscirkel til AF_1 er lig med trekantens halve omkreds, er denne afstand altså $ae + a$, og da

$$F_2C = F_2O + OC = ae + a$$

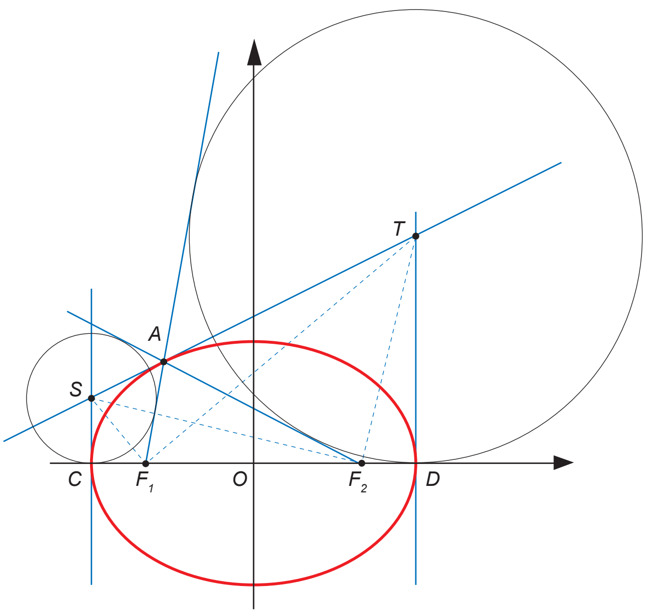
tangerer den ydre røringscirkel siden F_1F_2 i C.

Det er velkendt, at vinkelhalveringslinjen til nabovinklerne til A falder sammen med ellipsetangenten i punktet, så AS er ellipsetangent. Tangenten i A har ligningen

$$\frac{xx_1}{a^2} + \frac{yy_1}{b^2} = 1$$

og heri passer koordinaterne $(-a, r_1)$ til S:

$$\frac{-ax_1}{a^2} + \frac{y_1r_1}{b^2} = 1 \;\Leftrightarrow\; \frac{-x_1}{a} + \frac{y_1r_1}{b^2} = 1 \;\Leftrightarrow\; r_1 = \frac{b^2(a+x_1)}{ay_1}$$



På samme måde ligger punktet T (a, r_2) på tangenten i A, så

$$\frac{ax_1}{a^2} + \frac{y_1r_2}{b^2} = 1 \;\Leftrightarrow\; \frac{x_1}{a} + \frac{y_1r_2}{b^2} = 1 \;\Leftrightarrow\; r_2 = \frac{b^2(a-x_1)}{ay_1}$$

Altså er

$$r_1 \cdot r_2 = \frac{b^4(a+x_1)(a-x_1)}{a^2y_1^2} = \frac{b^4(a^2-x_1^2)}{a^2y_1^2} \qquad (1)$$

Nu ligger A (x_1, y_1) på ellipsen, så

$$\frac{x_1^2}{a^2} + \frac{y_1^2}{b^2} = 1 \;\Leftrightarrow$$
$$b^2x_1^2 + a^2y_1^2 = a^2b^2 \;\Leftrightarrow$$
$$a^2y_1^2 = b^2\left(a^2 - x_1^2\right)$$

så vi efter (1) får, at

$$r_1 \cdot r_2 = \frac{b^4(a^2-x_1^2)}{b^2(a^2-x_1^2)} = b^2 \;.$$