Pythagoras som kvadratopdeler

Allan Tarp, VUC Århus

Direkte fortæller Pythagoras, at hvis vinkel C er ret i trekant ABC, så er $c^2 = a^2 + b^2$.

Indirekte fortælles, at højden på c opdeler det store kvadrat c^2 i to rektangler Rv og Rh til venstre og højre, som har samme areal som de to overliggende kvadrater b^2 og a^2.

Geometrisk bevis

Trekant ABC sænkes stykket c til $A'B'C'$, og drejes 90 grader med uret omkring A til $AA'E$. Højden på c skærer kvadratet c^2 i punkterne D og D'.

Rektanglet $ADD'A'$ har samme areal som parallelogrammet $ACC'A'$, der har b som både højde og grundlinie. Ergo er $Rv = b^2$. Tilsvarende ses, at $Rh = a^2$. Et viola: $c^2 = Rh + Rv = a^2 + b^2$.

Algebraisk bevis

Med B som udgangspunkt laves to projektioner: $BD = a·\cos(B)$ og $BC = a = c·\cos(B)$. Dvs. $Rh = BD · c = (a·\cos(B))·c = a·(\cos(B)·c) = a·a = a^2$. Tilsvarende vises at $Rv = b^2$. Et viola: $c^2 = Rh + Rv = a^2 + b^2$.

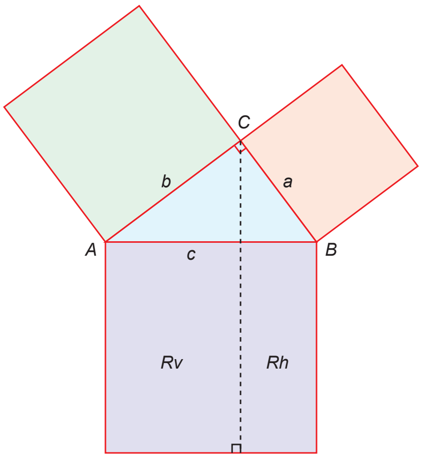
Tilsvarende fortæller den udvidede Pythagoras (cosinus–relationen), at i trekant ABC er $c^2 = a^2 + b^2 – 2·a·b·\cos(C)$. I en spidsvinklet trekant betyder dette, at højderne opdeler sidernes kvadrater i rektangler, hvor nabo–siders nabo–rektangler har samme areal.

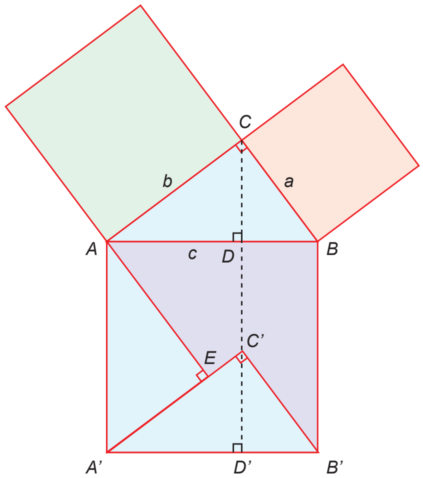
Algebraisk bevis

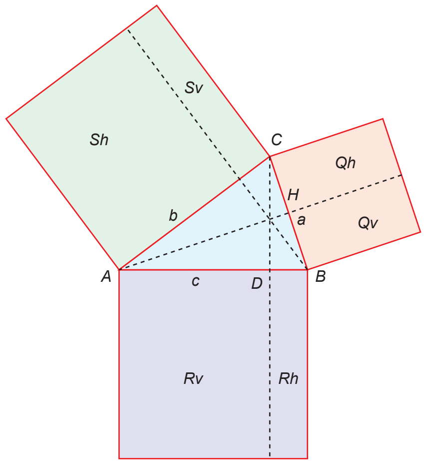
Med B som udgangspunkt laves to projektioner: $BD = a·\cos(B)$ og $BH = c·\cos(B)$. Dvs. $Rh = BD·c = (a·\cos(B))·c = a·(\cos(B)·c) = a·BH = Qv$.

Tilsvarende vises at $Rv = Sh$, og at $Sv = Qh$. Dvs. A–rektanglerne er $b·c·\cos(A)$ (Rv og Sh), B–rektanglerne er $a·c·\cos(B)$ (Rh og Qv), og C–rektanglerne er $a·b·\cos(C)$ (Sv og Qh).

Heraf følger, at $c^2 = Rv + Rh = Sh + Qv = (b^2 – Sv) + (a^2 – Qh) = a^2 + b^2 – (Sv + Qh) = a^2 + b^2 – 2·a·b·\cos(C)$.







Formler på vers

Allan Tarp, VUC Aarhus

Normalt kan en formel slås op i en formelsamling. Hvis ikke, er det nyttigt med en huskeregel.

Fx brugtes tidligere følgende vers til at løse andengradsligningen $x^2 + b·x + c = 0$.

Den halve folder med tegn modsat
man øge eller mindske må
med roden af sammes kvadrat
hvorfra sidste led skal forgå.

Sidder man med en førstegradsligning, kan man bruge 'Vi lister os af sted på tå' til at synge *Regnesangen.*

Vi sidder her med ligninger,
som løses ved at rykke.
Vi sætter parenteserne
om hvert et gangestykke.
Vi skifter tegn og flytter væk
til ting, der puttes i en sæk.
Og bliver vi ved – så vil alle ku se'
at ligningen løses, HURRA for det

På engelsk kan man med samme melodi synge *'Hymn to Equations'*.

Equations are the best we know,
they're solved by isolation.
But first the brackets must be placed
around multiplication.
We change the sign and take away
and only x itself will stay.
We just keep on moving, we never give up.
So feed us equations, we don't want to stop.