Et nyt vektorprodukt

Helge Bennedsen, helge_bennedsen@mail.dk

Jeg har leget lidt med tal– og vektorbegreberne på hjemmesiden talogrum.dk, hvor nedenstående produkt af to vektorer er defineret:

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=\vec{a}\bullet\vec{b}+i\cdot\left(\vec{a}\times\vec{b}\right)$$

Hvor nogle sædvanlig størrelser er defineret nedenunder:

$$\vec{a}\bullet\vec{c}=a_1c_1+a_2c_2+a_3c_3$$

$$\vec{a}\times\vec{c}=\begin{pmatrix}a_2c_3-a_3c_2\\a_3c_1-a_1c_3\\a_1c_2-a_2c_1\end{pmatrix}$$

Det mest interessante ved det nye produkt er regelen for et produkt af tre vektorer:

$$(\vec{a}\cdot\vec{c})\cdot\vec{e}=\vec{a}\cdot(\vec{c}\cdot\vec{e})=\vec{a}\cdot\vec{c}\cdot\vec{e}$$

Overvejelserne, der har ført dertil er udførligt beskrevet i talogrum.dk.

Hvis nogen blandt LMFK–bladets læsere er stødt på ovenstående i andre sammenhænge, vil jeg gerne informeres om det via min email–adresse.

Jeg vil vise noget af det, som det nye vektorprodukt kan bruges til:

1) $\vec{a}\cdot\vec{a}=\vec{a}\bullet\vec{a}+i\cdot\vec{a}\times\vec{a}=\vec{a}\bullet\vec{a}+i\cdot\vec{0}=\vec{a}\bullet\vec{a}=\left|\vec{a}\right|^2$

– såfremt koordinaterne i vektoren er reelle tal.

2) $$\begin{aligned}\left|\vec{a}\right|^2\cdot\vec{b}&=\vec{a}\cdot(\vec{a}\cdot\vec{b})=\vec{a}\cdot(\vec{a}\bullet\vec{b}+i\cdot\vec{a}\times\vec{b})\\&=(\vec{a}\bullet\vec{b})\cdot\vec{a}+i\cdot(\vec{a}\bullet(\vec{a}\times\vec{b})+i\cdot\vec{a}\times(\vec{a}\times\vec{b}))\end{aligned}$$

der kan reduceres til følgende:

$$\left|\vec{a}\right|^2\cdot\vec{b}=(\vec{a}\bullet\vec{b})\cdot\vec{a}-\vec{a}\times(\vec{a}\times\vec{b})\,,$$

der kan omskrives til en kendt formel fra rumgeometrien:

$$\vec{a}\times(\vec{a}\times\vec{b})=(\vec{a}\bullet\vec{b})\cdot\vec{a}-\left|\vec{a}\right|^2\cdot\vec{b}$$

3) $$\begin{aligned}\left|\vec{a}\right|^2\cdot\left|\vec{b}\right|^2&=\vec{a}\cdot\vec{a}\cdot\left|\vec{b}\right|^2=\vec{a}\cdot\left|\vec{b}\right|^2\cdot\vec{a}=(\vec{a}\cdot\vec{b})\cdot(\vec{b}\cdot\vec{a})\\&=\left(\vec{a}\bullet\vec{b}+i\cdot\vec{a}\times\vec{b}\right)\cdot\left(\vec{b}\bullet\vec{a}+i\cdot\vec{b}\times\vec{a}\right)\\&=\left(\vec{a}\bullet\vec{b}+i\cdot\vec{a}\times\vec{b}\right)\cdot\left(\vec{a}\bullet\vec{b}-i\cdot\vec{a}\times\vec{b}\right)\\&=(\vec{a}\bullet\vec{b})^2+\left|\vec{a}\times\vec{b}\right|^2\end{aligned}$$

der kan reduceres til følgende kendte rumgeometriske sætning:

$$\left|\vec{a}\right|^2\cdot\left|\vec{b}\right|^2=(\vec{a}\bullet\vec{b})^2+\left|\vec{a}\times\vec{b}\right|^2$$

4) – og en pludselig indskydelse: Løs ligningen

$$\vec{x}\bullet\vec{y}=t_0\wedge\vec{x}\times\vec{y}=\vec{t}$$

hvor alle koordinater og tal er reelle, hvilket nu ikke er specielt vanskeligt. Lad os antage, at vil finde ud af, på hvilken måde de to ukendte vektorer $\vec{x}$ og $\vec{y}$ hænger sammen: Vi gør følgende:

$$\vec{x}\cdot\vec{y}=\vec{x}\bullet\vec{y}+i\cdot\vec{x}\times\vec{y}=t_0+i\cdot\vec{t}$$

der så bliver til $\vec{x}\cdot\vec{y}=t_0+i\cdot\vec{t}$. Vi ganger nu med $\vec{x}$ fra venstre og får så:

$$\vec{x}\cdot(\vec{x}\cdot\vec{y})=\vec{x}\cdot(t_0+i\cdot\vec{t})$$

der kan omskrives til

$$(\vec{x}\cdot\vec{x})\cdot\vec{y}=t_0\cdot\vec{x}+i\cdot(\vec{x}\cdot\vec{t})=t_0\cdot\vec{x}+i\cdot(\vec{x}\bullet\vec{t}+i\cdot\vec{x}\times\vec{t})$$

der så bliver til:

$$\left|\vec{x}\right|^2\cdot\vec{y}=t_0\cdot\vec{x}+i\cdot(\vec{x}\bullet\vec{t})-\vec{x}\times\vec{t}$$

men da $\vec{x}\times\vec{y}=\vec{t}$ ved vi, at $\vec{x}\perp\vec{t}\Rightarrow\vec{x}\bullet\vec{t}=0$ og yderligere ved vi, at $-\vec{x}\times\vec{t}=\vec{t}\times\vec{x}$, hvilket så giver udtrykket

$$\left|\vec{x}\right|^2\cdot\vec{y}=t_0\cdot\vec{x}+\vec{t}\times\vec{x}$$

og så får vi udtrykket:

$$\vec{y}=\frac{t_0\cdot\vec{x}+\vec{t}\times\vec{x}}{\left|\vec{x}\right|^2}$$

hvor $\vec{x}$ blot skal være en egentlig vektor vinkelret på $\vec{t}$. $\vec{x}$ kan vælges som en linearkombination af vektorerne $\vec{e}_1\times\vec{t}$, $\vec{e}_2\times\vec{t}$ og $\vec{e}_3\times\vec{t}$, og så er den hjemme.

Jeg har skrevet en mere udførlig beskrivelse af ovenstående sager, som interesserede læsere kan få sendt per email.