Ellipsetangenter

Alija Muminagić, Nykøbing F. & Jens Carstensen, Tårnby Gymnasium

Vi skal her se på beliggenheden af skæringspunktet mellem ortogonale ellipsetangenter. Vi viser

Sætning. Skæringspunkterne for ortogonale ellipsetangenter ligger på en cirkel med centrum i (0,0) og radius $\sqrt{a^2+b^2}$.

Bevis. Ellipsen med halvakser a og b og centrum i (0, 0) har den velkendte ligning

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$$

Lad nu to ortogonale ellipsetangenter have ligningerne

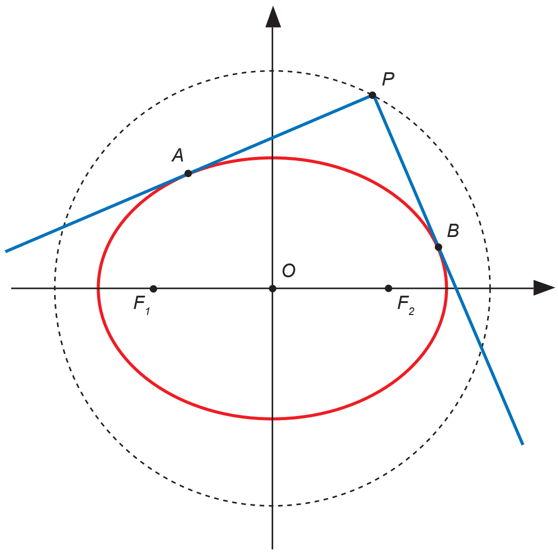
$$y=kx+p \quad \text{og} \quad y=-\frac{1}{k}x+q$$

Vi udregner skæringspunktets koordinater til

$$(x_1,y_1)=\left(\frac{k(q-p)}{k^2+1},\frac{k^2q+p}{k^2+1}\right)$$

Ved en smule algebra får vi

$$x_1^2+y_1^2=\frac{k^2q^2+p^2}{k^2+1} \tag{1}$$



Ellipsens ligning er

$$b^2x^2+a^2y^2=a^2b^2$$

Skæringspunktet med den ene tangent fås ved at indsættes tangentens ligning i ellipsens:

$$b^2x^2+a^2(kx+p)^2=a^2b^2 \quad \Leftrightarrow$$
$$(b^2+a^2k^2)x^2+2a^2kpx+p^2a^2-a^2b^2=0\,.$$

Vi kræver, at denne andengradsligning i x har præcis én løsning, dvs. dens diskriminant er 0:

$$(2a^2kp)^2-4(b^2+a^2k^2)\cdot(p^2a^2-a^2b^2)=0$$

Lidt algebra giver, at denne ligning er ensbetydende med

$$a^2k^2+b^2=p^2 \tag{2}$$

Tilsvarende fås, at betingelsen for, at den anden rette linje er tangent, er

$$a^2\cdot\left(-\frac{1}{k}\right)^2+b^2=q^2 \quad \Leftrightarrow \quad a^2+b^2k^2=q^2k^2 \tag{3}$$

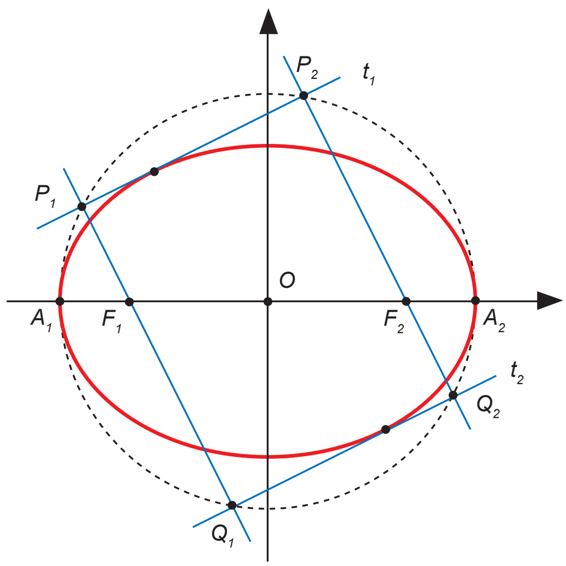
Ligningerne (2) og (3) indsættes i (1), så vi får

$$\begin{aligned} x_1^2+y_1^2 &= \frac{a^2+b^2k^2+a^2k^2+b^2}{k^2+1}\\ &= \frac{(a^2+b^2)(k^2+1)}{k^2+1}\\ &= a^2+b^2 \end{aligned}$$

Altså ligger skæringspunktet på en cirkel med centrum (0,0) og radius $\sqrt{a^2+b^2}$.

Beviser ved hjælp af analytisk geometri som ovenstående er faktisk sjældent særlig elegante, og desuden tilslører de i mange tilfælde de geometriske sammenhænge. Vi skal derfor vende os mod en mere euklidisk tilgang til ortogonale ellipsetangenter. Vi begynder med følgende

Sætning. Produktet af afstandene fra brændpunkterne til en ellipsetangent er konstant og lig med kvadratet b^2 af lilleaksen.



Bevis. Lad t_1 og t_2 være parallelle ellipsetangenter og P_1 og P_2 være projektioner af brændpunkterne F_1 og F_2 på t_1 og Q_1 og Q_2 projektionerne af F_1 og F_2 på t_2. Så ligger punkterne P_1, P_2, Q_1 og Q_2 på ellipsens principalcirkel, dvs. cirklen med storaksen som diameter. Af symmetrigrunde er

$$F_2P_2\cdot F_1P_1=F_1Q_1\cdot F_1P_1$$

Matematik

Efter kordesætningen (punkts potens) er

$$F_1Q_1 \cdot F_1P_1 = F_1A_1 \cdot F_1A_2$$

hvor A_1 og A_2 er ellipsens toppunkter på storaksen. Med koordinaterne

$$A_2\,(-a,\,0)\ ,\ F_1\,(-ae,\,0)\ ,\ F_2\,(ae,\,0)\ ,\ A_2\,(a,\,0)$$

hvor e er ellipsens excentricitet, er

$$\begin{aligned} F_1A_1 \cdot F_1A_2 &= (-ae+a)(a+ae) \\ &= a^2 - a^2e^2 = a^2(1-e^2) = b^2 \end{aligned}$$

Dette viser det ønskede.

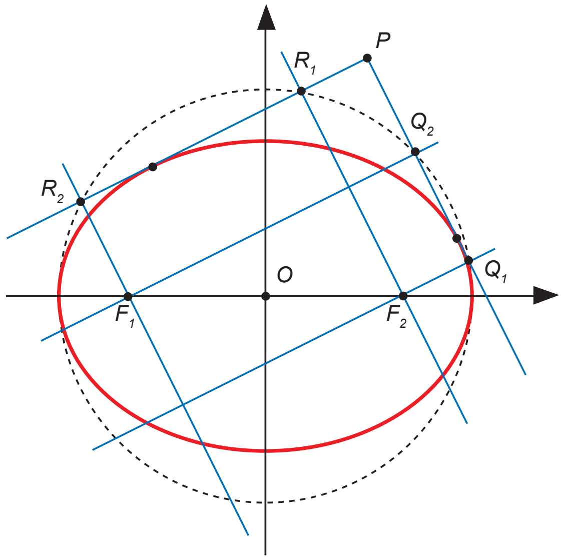
Vi vender nu tilbage til den første sætning og ser igen på to vinkelrette ellipsetangenter med skæringspunkt P. Punkterne Q_1, Q_2, R_1 og R_2 er projektionerne af brændpunkterne F_1 og F_2 på tangenterne og ligger derfor på principalcirklen. Kordetangentsætningen (punkts potens) for punktet P med hensyn til denne cirkel er

$$PQ_1 \cdot PQ_2 = R_1F_2 \cdot R_2F_1$$

Det sidste produkt er produktet af brændpunkternes afstande fra den ene tangent og efter sætningen oven for gælder derfor

$$R_1F_2 \cdot R_2F_1 = b^2$$

Nu er potensen af P med hensyn til cirklen også, idet cirklens radius er a:



$$OP^2 - a^2$$

Dermed er

$$OP^2 - a^2 = b^2 \quad \Leftrightarrow \quad OP^2 = a^2 + b^2$$

Punktet P ligger derfor på cirklen med centrum O og radius $\sqrt{a^2+b^2}$.

Henvisninger

Carl Hyltén–Cavallius & Lennart Sandgren: *Plan Geometri* (Hermods, Malmö, 1960)
Jens Carstensen: *Geometri og keglesnit* (Systime, 1996)