Tangentbestemmelse

JENS CARSTENSEN, Tårnby Gymnasium

Vi bringer et par bemærkninger om bestemmelse af ligningen for tangenten til grafen for et polynomium i et givet punkt på grafen.

Lad os fx se på funktionen

$$f(x) = 2x^3 - x + 7$$

hvor vi vil finde ligningen for tangenten i punktet $(2, f(2)) = (2, 21)$. Traditionelt finder vi $f'(x) = 6x^2 - 1$, $f'(2) = 23$, så tangentens ligning er

$$y = f(2) + f'(2)(x-2) \Leftrightarrow$$
$$y = 21 + 23(x-2) \Leftrightarrow$$
$$y = 23x - 25$$

Imidlertid gælder som bekendt, at et polynomium $p(x)$ kan udvikles ud fra et givet punkt a, så

$$p(x) = q(x)\cdot(x - a)^2 + mx + k$$

Her er linjen med ligningen $y = mx + k$ tangent til grafen i punktet $(a, p(a))$.

I vores eksempel ovenfor får vi, at

$$2x^3 - x + 7 =$$
$$(x - 2)^2\cdot(2x + 8) + 23x - 25$$

Tangentbestemmelse for polynomier kan altså foregå uden differentialregning. Desværre kræver regningen polynomiers division, som jo i gymnasiematematikken hører fortiden til. Vi kan dog omgå denne vanskelighed.

Vi sætter $(x - 2)^2 = 0$, dvs.

$$(x - 2)^2 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x^2 = 4x - 4$$

I omegnen af punktet $x = 2$ er $4x - 4$ en god tilnærmelse til x^2. Vi får så successivt:

$$2x^3 - x + 7$$
$$\approx 2x(4x - 4) - x + 7 = 8x^2 - 9x + 7$$
$$\approx 8(4x - 4) - 9x + 7 = 23x - 25$$

Voilà! Tangentens ligning er igen fundet til $y = 23x - 25$.