En ny opgavetype til den skriftlige eksamen i matematik

Bjarne Schmidt, Syddansk Universitet

I LMFK–bladet nr. 1 (2012) nævner fagkonsulent Bjørn Grøn, at der er problemer med stadigt flere tilbud til eleverne om at benytte skabelonbesvarelser til en del af opgaverne ved den skriftlige eksamen i matematik. Det er indlysende, at det ikke er evnen til at finde et passende black–box–program og efterfølgende indtaste/indlæse opgavens oplysninger, man ønsker at teste ved eksamen.

Herunder skitseres en ny opgavetype, der kunne supplere de hidtidige opgaver til skriftlig eksamen for i højere grad at teste eleverne i nogle af de matematikkompetencer, der anses for relevante. Elevernes arbejde med denne opgavetype forud for eksamen kunne også være et nyttigt middel til at styrke den daglige undervisning.

Jeg forestiller mig, at eleverne kan få præsenteret en konkret opgave *sammen med* en udarbejdet besvarelse af opgaven. Besvarelsen skal imidlertid være behæftet med fejl, og elevens opgave er derfor at finde fejlene og kommentere dem! Jeg har lavet et eksempel på sådan en besvarelse med udgangspunkt i opgave 11 fra studentereksamen i matematik A august 2011 (opgaven er dog forkortet en lille smule, idet jeg har udeladt delspørgsmålet, der går på at skitsere graferne for de to funktioner). Det er ikke tanken, at eleven skal *rette* besvarelsen og finde de rigtige resultater – det kan et black–box–program måske hurtigt klare – men de skal påpege fejlene og kommentere dem. Jeg forestiller mig, at eleven *ikke ved*, hvor mange fejl, der er, men måske får oplyst, at der er mellem 1 og 6 fejl! Pointene skal gives ud fra, om alle fejl er fundet og ud fra kvaliteten af de tilhørende kommentarer. Nogle kommentarer vil oplagt have karakter af, at eleven beskriver, hvad der i stedet skulle have stået, men vægten ved bedømmelsen skal lægges på, hvorvidt eleven får formidlet sin forståelse med så god matematisk sprogbrug og præcision som muligt.

En sådan opgave af typen *"find fejlene…"* er naturligvis ikke revolutionerende! Jeg er sikker på, at man mange steder lader eleverne arbejde med den slags som et element i den daglige undervisning. Jeg finder dog, at der er en række fordele ved denne opgavetype, der gør, at den kan være relevant også i eksamenssituationen:

a) Der er mange forskellige typer af fejl, der med fordel kan indbygges i den udleverede besvarelse. Der kan selvfølgelig være tale om deciderede regnefejl, men også om metodefejl/forståelsesfejl eller fejl i den matematiske notation. (Eksemplet herunder indeholder alle de her nævnte fejltyper).

b) Elevens CAS–værktøj er ikke til megen hjælp, når sådan en opgave skal løses – det handler jo ikke om at finde det rigtige facit, men om at finde og kommentere fejlene, der er begået. Eleven kan måske forsøge at lade CAS–værktøjet løse de konkrete beregninger bid for bid, men mange fejltyper vil kun vanskeligt lade sig afsløre på denne måde. I opgaveeksemplet er resultatet til spørgsmål a) eksempelvis korrekt, men der er adskillige fejl i besvarelsen alligevel!

c) Eleven testes med sådan en opgave også i evnen til at læse en matematisk tekst og forholde sig kritisk til det læste. Det er en meget væsentlig kompetence at opnå, så det er oplagt at lade det indgå mere konkret i eksamen, end tilfældet er i dag. For aftagerinstitutionerne er det også afgørende, at studenterne er gode til at læse en matematikbaseret tekst. Hidtil er denne evne blandt andet blevet opøvet ved at eleven selv har udformet matematiktekster i form af opgavebesvarelser, men de øgede muligheder for skabelonløsninger risikerer at sænke udbyttet af denne sidegevinst ved opgaveregning betragteligt.

d) Endelig tror jeg, at der kan komme noget godt ud af det, hvis arbejdet med den slags opgaver får det løft, der naturligt vil komme, hvis det bliver en disciplin, der indgår til den skriftlige eksamen. Med tiden ville der blive oparbejdet et katalog af gode og lærerige, men med vilje fejlbehæftede opgavebesvarelser, som eleverne kun kan blive klogere af at arbejde med! Man kunne ligefrem håbe, det kunne have en positiv afsmitning i elevens egne opgavebesvarelser ved at eleven måske vil føle et behov for at øge mængden af tekst og dermed forklaringsniveauet.

Ovenstående er blot nogle strøtanker. Der skal selvfølgelig arbejdes videre med denne opgavetype, hvis den på et tidspunkt skal indgå i et eksamenssæt. Eleverne skal i den situation være fortrolige med den slags opgaver, og der skal være klarhed over kravene til en elevbesvarelse. Dette arbejde skal naturligvis overlades til eksperterne på området, dvs. til de matematiklærere der underviser eleverne til hverdag! Det kan også være, at opgavetypen alligevel ikke egner sig til eksamensbrug, men måske dette indlæg så kan være en lille inspiration til at inddrage denne måde at arbejde med matematik på i den daglige undervisning.

Hvis opgavekommissionen en dag skal formulere matematikopgaver af denne slags til eksamen, forudser jeg dog et enkelt problem: Det bliver ikke helt let for en udenforstående at læse korrektur på opgaven… ☺

Opgave 11
Stx matematik A august 2011
– en lille smule forkortet!

To funktioner g og h er givet ved

$$g(x)=4\left(1-e^{-x}\right) \text{ og } h(x)=e^{x}-1$$

a) Bestem førstekoordinaten til hvert af skæringspunkterne mellem graferne for de to funktioner.

b) Bestem arealet af punktmængden M afgrænset af graferne for g og h.

c) Bestem $g'(x)$ og gør rede for, at g er voksende.

Find og kommentér fejlene i løsningen på næste side:

a) Jeg finder skæringspunkter ved at sætte de to funktionsudtryk lig hinanden:

$$g(x) = h(x) \quad \Leftrightarrow$$

$$4\left(1-e^{-x}\right) = e^x - 1 \quad \Leftrightarrow$$

$$4 - 4e^{-x} = e^x - 1 \quad \Leftrightarrow$$

$$4e^x - 4e^{-x} \cdot e^x = e^x \cdot e^x - e^x \quad \Leftrightarrow$$

$$4e^x - 4 = e^{2x} - e^x \quad \Leftrightarrow$$

$$e^{2x} - 3e^x - 4 = 0 \qquad (*)$$

Nu sætter jeg $y = e^x$ og får så i stedet ligningen

$$y^2 - 3y - 4 = 0$$

Det er en andengradsligning med diskriminanten $d = (-3)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-4) = 25$ så løsningerne er

$$y = \frac{3 \pm 5}{2} = \begin{cases} 1 \\ 4 \end{cases}$$

Ligningen (*) får derfor løsningerne

$$e^x = 1 \quad \wedge \quad e^x = 4 \quad \Leftrightarrow$$

$$x = \ln(1) \quad \wedge \quad x = \ln(4) \quad \Leftrightarrow$$

$$x = 0 \quad \wedge \quad x = \ln(4)$$

Skæringspunkternes førstekoordinater er altså $x = 0$ og $x = \ln(4)$.

b) Da punktmængden er afgrænset af de to funktioners grafer, må punktmængden nødvendigvis ligge mellem de to skæringspunkter. Jeg antager, at grafen for g ligger oven over grafen for h og udregner nu følgende integral:

$$\int_0^{\ln(4)} \left(g(x) - h(x)\right) dx =$$

$$\int_0^{\ln(4)} \left(4\left(1-e^{-x}\right) - \left(e^x - 1\right)\right) dx =$$

$$\int_0^{\ln(4)} \left(5 - 4e^{-x} - e^x\right) dx =$$

$$\left[5x + 4e^{-x} - e^x\right]_0^{\ln(4)} =$$

$$5\ln(4) + 4e^{-\ln(4)} - e^{\ln(4)} - \left(5 \cdot 0 + 4 \cdot e^{-0} - e^0\right) =$$

$$5\ln(4) + 4 \cdot \left(-\frac{1}{4}\right) - 4 - 0 =$$

$$5\ln(4) - 5 \approx 1{,}93147$$

Da integralet blev positivt, er antagelsen om grafernes indbyrdes beliggenhed korrekt, og arealet af punktmængden M er

$$A(M) = 5\ln(4) - 5\,.$$

c) Jeg finder $g'(x)$ ved at bruge produktreglen for differentiation:

$$g'(x) =$$

$$0 \cdot \left(1 - e^{-x}\right) + 4 \cdot (-1)(-1)e^{-x} \Leftrightarrow$$

$$g'(x) = 4e^{-x}$$

Ved at indsætte en vilkårlig x–værdi (her $x = 2$) får jeg, at

$$g'(2) = 4e^{-2} \approx 0{,}5413 > 0$$

Idet jeg nu har, at $g'(x) > 0$ for en vilkårlig x–værdi, har jeg vist, at g er voksende.