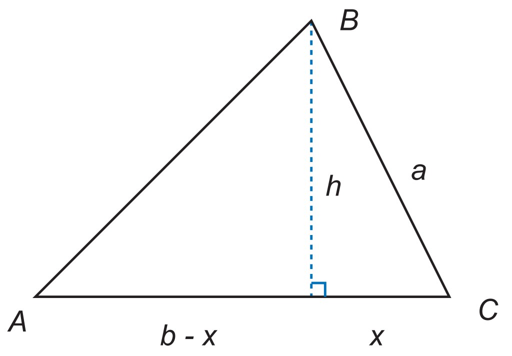
Herons formel, trekantens cirkler og Pythagoras på faktorform

Allan Tarp, VUC Århus

Herons arealformel $T = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$ følger af gentaget brug af faktorreglen $p^2 - q^2 = (p+q)(p-q)$. Da $2s = a+b+c$, er $2s - 2a = -a+b+c$, $2s - 2b = a-b+c$ og $2s - 2c = a+b-c$.

Bevis

En trekants største vinkel kaldes B. I trekant ABC vil højden h fra B dele trekanten i to retvinklede trekanter, og dele siden b i to stykker, x mod C og $b-x$ mod A.



Længderne h og x findes af de to retvinklede trekanter:

$$x^2 + h^2 = a^2, \text{ dvs. } h^2 = a^2 - x^2$$

Dette indsættes i $(b-x)^2 + h^2 = c^2$ og giver $c^2 = (b-x)^2 + a^2 - x^2$. Ved overflytning fås

$$c^2 - a^2 = (b-x)^2 - x^2 = (b-x+x)\cdot(b-x-x)$$
$$= b\cdot(b-2x) = b^2 - 2bx, \text{ dvs. } 2bx = a^2 + b^2 - c^2$$

Da $T = ½\cdot h\cdot b$ er $4T = 2\cdot h\cdot b$ og

$$16\cdot T^2 = 4\cdot h^2\cdot b^2 = 4\cdot(a^2 - x^2)\cdot b^2 = 4\cdot a^2\cdot b^2 - 4\cdot x^2\cdot b^2$$
$$= (2\cdot a\cdot b)^2 - (2\cdot x\cdot b)^2 = (2\cdot a\cdot b + 2\cdot b\cdot x)\cdot (2\cdot a\cdot b - 2\cdot b\cdot x)$$

Heri indsættes nu $2bx = a^2 + b^2 - c^2$:

$$16\cdot T^2 = (2\cdot a\cdot b + a^2 + b^2 - c^2)\cdot (2\cdot a\cdot b - a^2 - b^2 + c^2)$$
$$= ((a+b)^2 - c^2)\cdot(-(a-b)^2 + c^2)$$
$$= ((a+b+c)(a+b-c))\cdot((a-b+c)(-a+b+c))$$
$$= 2s(2s-2c)(2s-2b)(2s-2a) = 16s(s-a)(s-b)(s-c)$$

Matematik

Dvs. $T^2 = s(s-a)(s-b)(s-c)$, et viola:

$$T = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$$

Kaldes den indskrevne cirkels radius r ses, at

$$T = \tfrac{1}{2}\cdot r\cdot a + \tfrac{1}{2}\cdot r\cdot b + \tfrac{1}{2}\cdot r\cdot c = \tfrac{1}{2}\cdot r\cdot 2s = r\cdot s$$

og dermed $r = \sqrt{(s-a)(s-b)(s-c)/s}$.

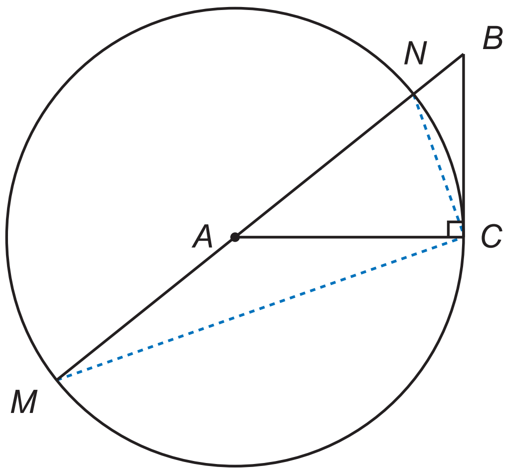
Kaldes den omskrevne cirkels radius R, giver sekantlængdeformlen den glemte del af sinusrelationerne, $2R = a/\sin A$.

Indsættes dette i arealformlen $T = \tfrac{1}{2}\cdot b\cdot c\cdot \sin A$ fås formlen

$4RT = abc$ – 'fire røde Tuborg = en sportsvand'

– den mest populære formel fra dengang, formler skulle læres udenad.

Pythagoras' læresætning findes både på ledform $a^2 + b^2 = c^2$ og faktorform $a^2 = (c+b)(c-b)$.



Faktorformen indses ved at tegne en cirkel med centrum i A og radius b. Kaldes c's skæring med cirklen M og N fås $BM = c + b$ og $BN = c - b$. Faktorformen følger da af de to ensvinklede trekanter BCN og BMC, hvor vinklerne BCN og BMC er ens, da de spænder over samme bue; eller af punktet B's potens med cirklen, $BN\cdot BM = BC^2$.