Herons formel efter Newton

Jens Carstensen, Tårnby Gymnasium

Vi skal se på, hvordan Newton beviste Herons formel i sin *Arithmetica Universalis* fra 1707. Beviset hører selvfølgelig langt fra til Newtons væsentligste bidrag til matematikken.

Lad ΔABC være en vilkårlig trekant med sidelængder a, b og c. Vi kan antage, at $b = AC$ er den længste side i trekanten.

M er midtpunkt af AC og CA forlænges ud over A til F, så $AF = c$. Punktet E afsættes på AC, så $AE = c$ og vi trækker linjerne BF og BE. Endelig trækkes højden $h = BD$ fra vinkelspidsen B.

Pythagoras sætning i ΔADB og ΔCDB giver

$$h^2 = c^2 - AD^2 \quad \text{og} \quad h^2 = a^2 - CD^2$$

hvoraf

$$\begin{aligned} &c^2 - AD^2 = a^2 - CD^2 \quad \Leftrightarrow \\ &a^2 - c^2 = CD^2 - AD^2 = (CD + AD)(CD - AD) \\ &= b(CD - AD) \end{aligned}$$

Altså er

$$CD - AD = \frac{a^2 - c^2}{b}$$

Videre er

$$\frac{a^2 - c^2}{b} = CD - AD = (CM + MD) - (AM - MD) = 2 \cdot MD$$

fordi $AM = CM$. Altså får vi

$$MD = \frac{a^2 - c^2}{2b}$$

Derefter er

$$\begin{aligned} DE &= MD + ME = MD + (AE - AM) \\ &= \frac{a^2 - c^2}{2b} + \left(c - \frac{b}{2}\right) = \frac{2bc + a^2 - b^2 - c^2}{2b} \end{aligned}$$

Da $AF = AB = AE = c$, er A centrum for en cirkel gennem F, B og E. Da $\angle FBE$ er en periferivinkel i denne cirkel, der spænder over diameteren FE, er den ret. I den retvinklede ΔFBE er h højden på hypotenusen FE, så

$$h^2 = DE \cdot DF = DE \cdot (FE - DE) = DE \cdot (2c - DE)$$

Heri indsætter vi den oven for fundne værdi for DE:

$$\begin{aligned} h^2 &= \frac{2bc + a^2 - b^2 - c^2}{2b} \cdot \left(2c - \frac{2bc + a^2 - b^2 - c^2}{2b}\right) \\ &= \frac{2bc + a^2 - b^2 - c^2}{2b} \cdot \frac{2bc - a^2 + b^2 + c^2}{2b} \\ &= \frac{a^2 - (b^2 + c^2 - 2bc)}{2b} \cdot \frac{(b^2 + c^2 + 2bc) - a^2}{2b} \\ &= \frac{[(a^2 - (b-c)^2] \cdot [(b+c)^2 - a^2]}{4b^2} \\ &= \frac{(a - b + c)(a + b - c)(b + c - a)(b + c + a)}{4b^2} \\ &= \frac{(2s - 2b)(2s - 2c)(2s - 2a)2s}{4b^2} \end{aligned}$$

hvoraf endelig

$$\begin{aligned} &4b^2h^2 = 16s(s-a)(s-b)(s-c) \quad \Leftrightarrow \\ &4\cdot(2T)^2 = 16s(s-a)(s-b)(s-c) \quad \Leftrightarrow \\ &T^2 = s(s-a)(s-b)(s-c) \end{aligned}$$

Henvisning

William Dunham: *Newton's Proof of Heron's Formula* (Math Horizons, September 2011).