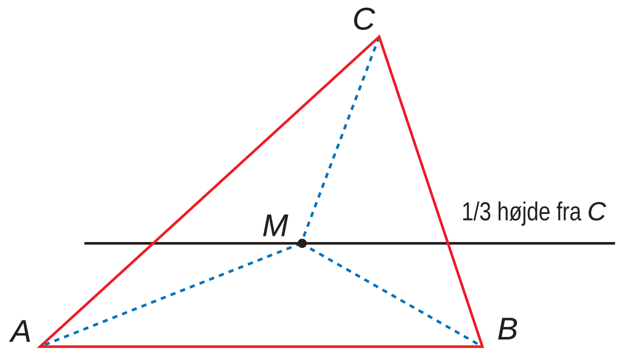
Mediansætninger ved brug af trekantens arealformel

Søren Høgh, VUC Århus

I det sidste nummer af dette blad anføres et bevis for, at medianerne skærer hinanden i samme punkt.

I denne artikel vil jeg vise, hvordan dette kan gøres ved brug af den elementære formel for trekantens areal og i tilgift få flere mediansætninger end blot skæringspunkt og deleforhold.

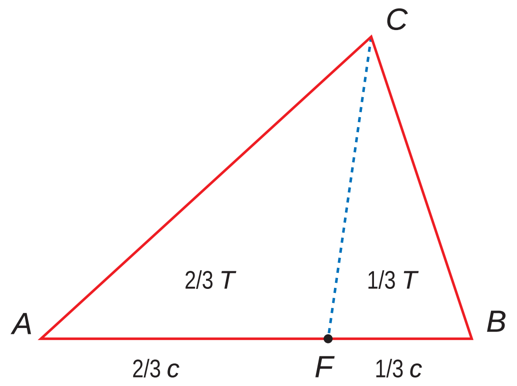
I en vilkårlig trekant ABC søges et indre punkt M, så de tre centraltrekanter AMB, BMC og CMA har samme areal.



Lad T være trekantens areal. Det er klart, at M skal ligge på den linje, som er parallel med siden AB i afstanden 1/3 højden fra C. Tilsvarende skal M ligge på linjen parallel med siden AC i afstanden 1/3 højden fra B. Dette viser, at der findes højest et punkt med den nævnte egenskab. Lad nu M være skæringspunktet mellem de nævnte linjer. Da ΔAMB og ΔAMC begge har arealet $1/3\ T$ har ΔCMB også arealet $1/3\ T$. Dermed har punktet M den søgte egenskab.

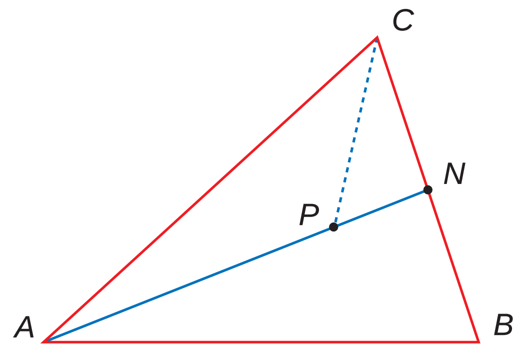
Vi har vist sætningen:
I en vilkårlig trekant findes netop et indre punkt M så de tre centraltrekanter udgående fra M har samme areal.

Det er klart, at en median deler trekanten i to trekanter med samme areal. Det er også klart, at hvis vi afsætter et punkt 1/3 side fra en vinkelspids og herfra trækker en linje til den modstående vinkelspids, så bliver trekanten delt i to trekanter med arealerne $1/3\ T$ og $2/3\ T$.



Lad os nu trække medianen fra A og afsætte punktet P på medianen 1/3 længde fra punktet på siden.

ΔAPC har så arealet $2/3 \cdot 1/2\ T = 1/3\ T$. Det samme gælder ΔAPB. Punktet P deler derfor ΔABC i tre lige store centraltrekanter. Heraf følger at punktet $P = M$. Punktet M ligger altså på medianen fra A. På tilsvarende måde ses at M ligger på de to andre medianer.



$$|PN| = 1/3\ |AN|, \quad |PA| = 2/3\ |AN|$$

$$\text{Areal}(\Delta ACN) = 1/2\ T, \quad \text{Areal}(\Delta APC) = 2/3 \cdot 1/2\ T = 1/3\ T$$

Vi har vist sætningen:
Medianerne skærer hinanden i samme punkt og deler hinanden i forholdet 1:2. Endvidere gælder, at medianernes skæringspunkt deler trekanten i tre lige store centraltrekanter, og det er det eneste punkt, der har denne egenskab. Desuden har vi, at de linjer, der er parallelle med trekantens sider i afstanden 1/3 højde fra siderne, skærer hinanden i medianernes skæringspunkt.