Et par optimeringsopgaver

Jens Carstensen, Tårnby Gymnasium & Alija Muminagić, Nykøbing F.

Vi skal se på et par opgaver inden for optimering, som viser sig på interessant måde at kunne klares uden differentialregning.

Opgave 1

En af standardopgaverne er at bestemme radius r og højde h i en cylindrisk konservesdåse, hvis rumfanget har en konstant værdi V og materialeforbruget ved fremstillingen af dåsen skal være minimalt.

Traditionelt noterer man, at bund og låg har arealerne πr^2 og den krumme overflade arealet $2\pi rh$, så vi ser på funktionen

$$f(r,h) = 2\pi r^2 + 2\pi rh$$

Desuden er

$$V = \pi hr^2 \quad \Leftrightarrow \quad 2\pi rh = \frac{2V}{r}$$

så den funktion, der skal minimeres er

$$g(r) = 2\pi r^2 + \frac{2V}{r}$$

Differentiation giver

$$g'(r) = 4\pi r - \frac{2V}{r^2}$$

og derefter

$$g'(r) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad 4\pi r^3 - 2V = 0 \quad \Leftrightarrow \quad r = \sqrt[3]{\frac{V}{2\pi}}$$

Fortegnsovervejelser for $g'(r)$ giver, at denne værdi af r giver minimalt materialeforbrug.

Imidlertid er det interessant, at man kan komme igennem opgaven uden brug af differentialregning, men ved brug af uligheden mellem aritmetisk og geometrisk middeltal. For positive tal a, b og c gælder som bekendt, at

$$\tfrac{1}{3}(a+b+c) \geq \sqrt[3]{abc}$$

og vælger vi

$$a = 6\pi r^2 \quad , \quad b = c = \frac{3V}{r}$$

får vi

$$\frac{1}{3}\left(6\pi r^2 + \frac{3V}{r} + \frac{3V}{r}\right) \geq \sqrt[3]{6\pi r^2 \cdot \frac{3V}{r} \cdot \frac{3V}{r}} \quad \Leftrightarrow$$

$$2\pi r^2 + \frac{2V}{r} \geq \sqrt[3]{54\pi V^2} \quad \Leftrightarrow$$

$$A \geq 3\sqrt[3]{2\pi V^2}$$

hvor A er dåsens overfladeareal. Lighedstegnet i uligheden opnås, hvis

$$6\pi r^2 = \frac{3V}{r} \quad \Leftrightarrow \quad r = \sqrt[3]{\frac{V}{2\pi}}$$

Altså er A mindst, hvis vi vælger radius til

$$r = \sqrt[3]{\frac{V}{2\pi}} = \sqrt[3]{\frac{\pi r^2 h}{2\pi}} = \sqrt[3]{\tfrac{1}{2}hr^2}$$

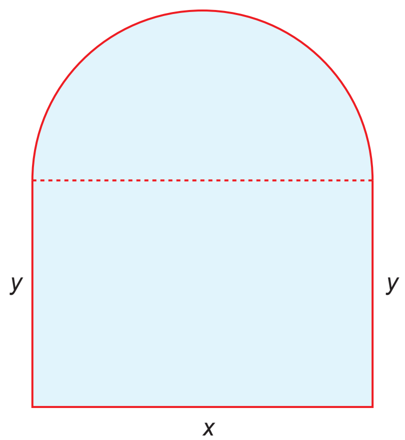
hvoraf

$$r^3 = \tfrac{1}{2}hr^2 \quad \Leftrightarrow \quad r = \tfrac{1}{2}h$$

Vi får her det kendte resultat, at den mest økonomiske konservesdåse opnås, hvis højden og diameteren er ens.

Opgave 2

En rende af form som et rektangel påsat en halvcirkel skal have mål, så tværsnitsarealet har en konstant værdi (den skal kunne føre en bestemt mængde vand) og så materialeforbruget (dvs. omkredsen) er mindst muligt.



Med betegnelserne på figuren er omkredsen

$$K = x + 2y + \tfrac{1}{2}\pi x$$

og det konstante tværsnitsareal er

$$A = xy + \tfrac{1}{2}\pi \cdot \tfrac{1}{4}x^2 \qquad \text{dvs.} \qquad y = \tfrac{1}{x}\left(A - \tfrac{1}{8}\pi x^2\right)$$

Så er omkredsen, der skal minimeres:

$$K(x) = x + \frac{2}{x}\left(A - \tfrac{1}{8}\pi x^2\right) + \tfrac{1}{2}\pi x = \left(1 + \tfrac{1}{4}\pi\right)x + \frac{2A}{x}$$

Denne funktion er af formen

$$K(x) = ax + \frac{b}{x}$$

Nu gælder i almindelighed for positive tal p og q, at

$$p + q \geq 2\sqrt{pq}$$

fordi dette er ensbetydende med, at $\left(\sqrt{p} - \sqrt{q}\right)^2 \geq 0$, hvor lighedstegnet gælder, netop hvis $p = q$. Altså er

$$K(x) \geq 2\sqrt{ax \cdot \frac{b}{x}} = 2\sqrt{ab}$$

Nu er $a = 1 + \frac{1}{4}\pi$ og $b = 2A$. Den mindste værdi, som omkredsen $K(x)$ kan antage, er altså

$$2\sqrt{ab} = 2\sqrt{\left(1 + \tfrac{1}{4}\pi\right) \cdot 2A} = \sqrt{2A \cdot (4 + \pi)}$$

og denne værdi antages når

$$ax = \frac{b}{x} \quad \Leftrightarrow \quad x = \sqrt{\frac{b}{a}} = \sqrt{\frac{2A}{1 + \frac{1}{4}\pi}} = \sqrt{\frac{8A}{4 + \pi}}$$

En del algebra giver, at $y = \frac{1}{2}x$.

Matematik