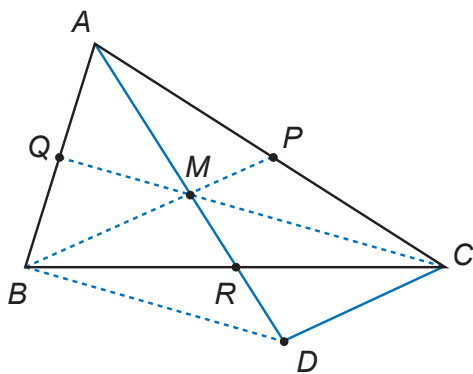


Medianernes skæringspunkt – et lettere bevis?

JENS CARSTENSEN, Tårnby Gymnasium

Det traditionelle bevis for, at en trekants medianer går gennem samme punkt er ofte vanskeligt for vore elever at gennemføre. Vi giver derfor to alternative beviser, der ikke afviger meget fra hinanden.

Sætning. I enhver trekant går medianerne gennem samme punkt og dette punkt deler medianerne i forholdet 2:1 regnet fra vinkelspidsen.



Bevis 1. Træk medianerne BP og CQ . De skærer hinanden i M . Træk linjen AM , som skærer BC i R . Vi vil vise, at AR er en median.

En linje gennem C parallel med BP skærer AR i D . I $\triangle ACD$ er P midtpunkt af AC , og da $CD \parallel PM$, er M midtpunkt af AD , dvs. $DM = AM$.

Træk linjen BD . I $\triangle ABD$ er Q midtpunkt af AB og M midtpunkt af AD (fordi $DM = AM$). Altså er QM midtpunktstransversal i $\triangle ABD$, så $QM \parallel BD$ eller $MC \parallel BD$.

Da nu $DC \parallel BM$ og $BD \parallel MC$, er $\square BMCD$ et parallelogram. Diagonalerne halverer altså hinanden, så R er midtpunkt af CD . Derfor er AR median.

Desuden er $DM = AM$ og da R er midtpunkt af DM , gælder $AM : MR = 2:1$.

Bevis 2. Træk medianerne BP og CQ . De skærer hinanden i M . Træk linjen AM , som skærer BC i R . Vi vil vise, at AR er en median.

AR forlænges til D , så $MD = AM$. I $\triangle ADC$ er så M og P midtpunkter af siderne AD og AC . Derfor er MP en midtpunktstransversal, så $MP \parallel CD$ eller $BM \parallel CD$. På samme måde er Q og M midtpunkter af siderne AB og AD i $\triangle ABD$, så QM er midtpunktstransversal og dermed $QM \parallel BD$ eller $MC \parallel BD$.

Vi har nu opnået, at $\square BMCD$ er et parallelogram, så diagonalerne halverer hinanden. Altså er R midtpunkt af BC og AR dermed en median i trekanten.

Videre er $MR = \frac{1}{2} MD = \frac{1}{2} AM$, så M deler medianen AR i forholdet 2:1 regnet fra vinkelspidsen.

Da MP og MQ som nævnt er midtpunktstransversaler i $\triangle ADC$ og $\triangle ABD$, er $MP = \frac{1}{2} DC = \frac{1}{2} BM$ og $MQ = \frac{1}{2} BD = \frac{1}{2} MC$. Dette betyder netop, at M deler medianerne BP og CQ i forholdet 2:1 regnet fra vinkelspidserne.