# Herons formel - et par bemærkninger

Jens Carstensen, Tårnby Gymnasium & Alija Muminagić, Nykøbing F.

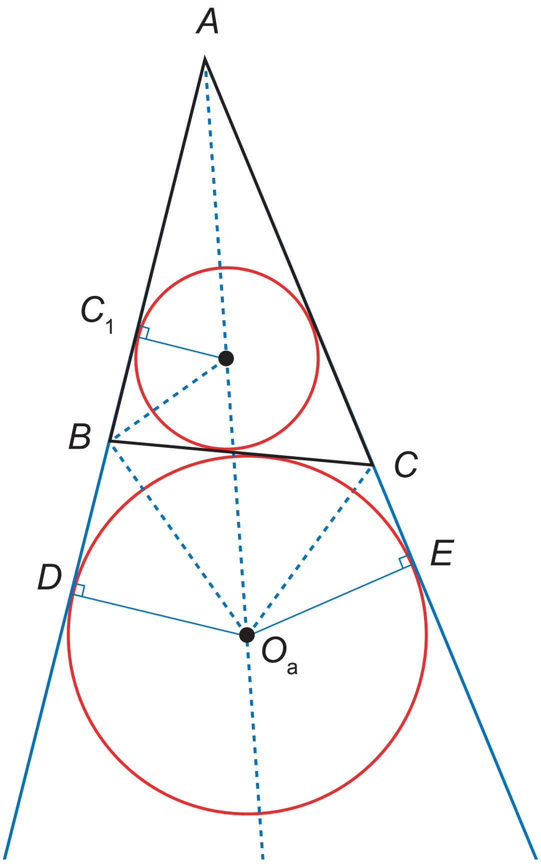
I LMFK–Bladet for maj 2011 gav Ole Witt–Hansen et geometrisk bevis for den velkendte Herons formel for trekantens areal. Beviset kan imidlertid forenkles noget, så vi ikke behøver så mange ensvinklede trekanter.

### Plangeometrisk bevis

Hvis vi med [...] betegner areal, får vi med figurens betegnelser:

$$T = [ABC] = [AO_aC] + [AO_aB] - [BO_aC]$$
$$\tfrac{1}{2}b\cdot r_a + \tfrac{1}{2}c\cdot r_a - \tfrac{1}{2}a\cdot r_a$$
$$= \tfrac{1}{2}r_a(b+c-a) = \tfrac{1}{2}r_a(2s-2a) = r_a(s-a),$$

så $r_a = \dfrac{T}{s-a}$ (1)




Da $\Delta OBC_1$ og $\Delta O_aBD$ er ensvinklede, er

$$\frac{OC_1}{BC_1} = \frac{BD}{O_aD} \iff \frac{r}{s-b} = \frac{s-c}{r_a} \iff rr_a = (s-b)(s-c)$$

Heri indsættes (1) samt den kendte formel $r = \dfrac{T}{s}$:

$$\frac{T}{s}\cdot\frac{T}{s-a} = (s-b)(s-c) \iff T^2 = s(s-a)(s-b)(s-c)$$

### Trigonometrisk bevis

Vi giver desuden et trigonometrisk–algebraisk bevis for Herons formel. Det er selvfølgelig noget mindre elegant end ovenstående. Vi omformulerer sådan:

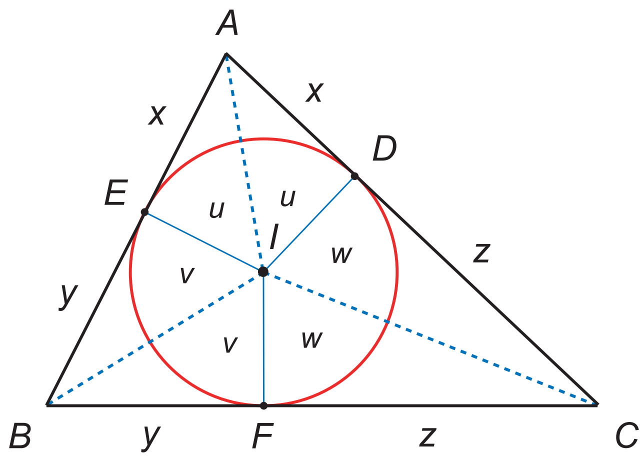
$$T^2 = \left(\frac{1}{2}ab\cdot\sin C\right)^2 = \frac{1}{16}\cdot 4a^2b^2\sin^2 C = \frac{1}{16}\cdot 4a^2b^2\cdot\left(1-\cos^2 C\right)$$
$$= \frac{1}{16}\left(4a^2b^2 - 4a^2b^2\cdot\cos^2 C\right) = \frac{1}{16}\left((2ab)^2 - (2ab\cdot\cos C)^2\right)$$
$$= \frac{1}{16}\left(2ab + 2ab\cdot\cos C\right)\cdot\left(2ab - 2ab\cdot\cos C\right)$$

Efter cosinusrelationen gælder $2ab\cdot\cos C = a^2 + b^2 - c^2$, og indsættes dette fås:

$$T^2 = \frac{1}{16}\left(2ab + a^2 + b^2 - c^2\right)\left(2ab - a^2 - b^2 + c^2\right)$$
$$= \frac{1}{16}\left[\left(a^2 + 2ab + b^2\right) - c^2\right]\cdot\left[c^2 - \left(a^2 - 2ab + b^2\right)\right]$$
$$= \frac{1}{16}\left[(a+b)^2 - c^2\right]\left[c^2 - (a-b)^2\right]$$
$$= \frac{1}{16}(a+b+c)(a+b-c)(c+a-b)(c-a+b)$$
$$= \frac{1}{16}\cdot 2s\cdot(2s-2c)(2s-2b)(2s-2a) = s(s-a)(s-b)(s-c)$$

### Komplekse tal

Endelig anfører vi et bevis for Herons formel ved hjælp af komplekse tal.



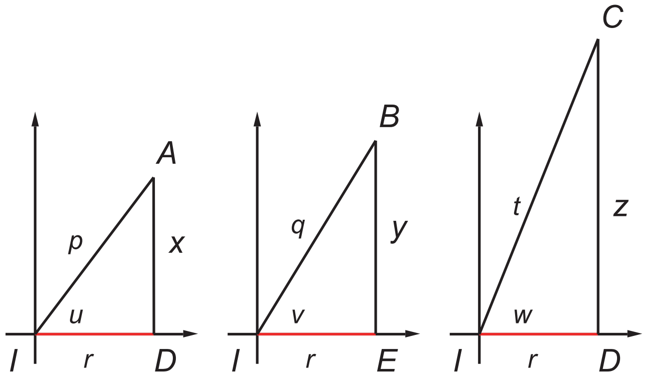

Den indskrevne cirkel tangerer $AB$, $BC$ og $CA$ i $E$, $F$ og $D$. Forbindelseslinjerne fra centrum $I$ til $A$, $B$, $C$, $E$, $F$, $D$ danner vinkler på $u$, $v$ og $w$ med hinanden som vist.

Vi har, at $u + v + w = 180°$. Vi sætter $x = AE = AD$, $y = BF = BE$ og $z = CF = CD$, så $x + y + z = s$.

Af de retvinklede trekanter *IAD*, *IBE* og *ICD* ser vi, at hvis trekanterne anbringes i den komplekse plan med *I* i begyndelsespunktet, kan vi finde tal $p$, $q$ og $t$, så

$$r + ix = p \cdot e^{iu} \quad , \quad r + iy = q \cdot e^{iv} \quad , \quad r + iz = t \cdot e^{iw}$$

Ved multiplikation fås




$$\begin{aligned}&(r + ix)(r + iy)(r + iz) \\ &= r^3 - r(xy + xz + yz) + i(r^2(x + y + z) - xyz) \qquad (2)\end{aligned}$$

og

$$\begin{aligned}&(r + ix)(r + iy)(r + iz) \\ &= pe^{iu} \cdot qe^{iv} \cdot te^{iw} = pqt \cdot e^{i(u+v+w)} = pqt \cdot e^{i\pi} = -pqt \qquad (3)\end{aligned}$$

Af (2) og (3) får vi ved at sammenholde imaginærdelene, at

$$\begin{aligned}&r^2(x + y + z) - xyz = 0 \\ \Leftrightarrow \quad & r = \sqrt{\frac{xyz}{x + y + z}} = \sqrt{\frac{(s-a)(s-b)(s-c)}{s}}\end{aligned}$$

Nu er endelig

$$T = r \cdot s = s \cdot \sqrt{\frac{(s-a)(s-b)(s-c)}{s}} = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$$