Ellipsen

Helge Bennedsen, helge_bennedsen@mail.dk

Vi betragter en ellipse, der har de to brændpunkter *A* og *B*, og hvor et tilfældigt punkt *C* på periferien er defineret således, at $|AC| + |BC|$ = konstant, der fastsættes som $2m$.

Afstanden mellem *A* og *B* fastsættes således at $|AB| = 2f$. Vi indfører punktet *D*, der er midtpunktet på linjestykket *AB* og vi indfører følgende vektorer:

1) $$\vec{a} = \overrightarrow{BC} \quad \vec{b} = \overrightarrow{AC} \quad \vec{c} = \overrightarrow{AB} \quad \vec{d} = \overrightarrow{DC}$$

Det vil meget hurtigt kunne indses, at der gælder følgende regneudtryk:

2) $$\vec{a} = 0.5\vec{c} + \vec{d} \quad \vec{b} = -0.5\vec{c} + \vec{d}$$

Det vil på et senere tidspunkt blive brugt, at:

3) $$\vec{a} + \vec{b} = 2\vec{d} \quad \text{og} \quad \vec{a} - \vec{b} = \vec{c}$$

Og ligeledes senere blive brugt at:

4) $$|\vec{a}|^2 - |\vec{b}|^2 = (\vec{a}+\vec{b})\bullet(\vec{a}-\vec{b}) = 2\vec{d}\bullet\vec{c}$$

Vi vil nu bruge udtrykket $|AC| + |BC|$ = konstant, der fastsættes som $2m$ til nogle regnestykker:

$$|\vec{a}| + |\vec{b}| = 2m \Leftrightarrow$$

$$|\vec{a}| = 2m - |\vec{b}| \Rightarrow (|\vec{a}|)^2 = (2m - |\vec{b}|)^2 \Leftrightarrow$$

$$|\vec{a}|^2 = 4m^2 + |\vec{b}|^2 - 4m|\vec{b}| \Leftrightarrow$$

5) $$|\vec{a}|^2 - |\vec{b}|^2 = 4m^2 - 4m|\vec{b}|$$

Nu skal vi bruge slutresultatet fra 4) for at komme videre og får så, at 5) kan videreomskrives til:

6) $$2\vec{d}\bullet\vec{c} = 4m^2 - 4m|\vec{b}| \Leftrightarrow 2m|\vec{b}| = 2m^2 - \vec{d}\bullet\vec{c}$$

Selv om det måske virker underligt, så kvadrerer vi udtrykkene i slutligningen 6) og får så, at:

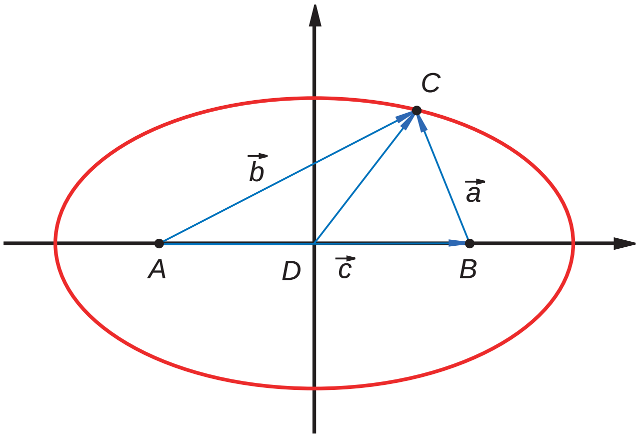
7) $$4 \cdot m^2 \cdot (\vec{b}\bullet\vec{b}) = (2m^2 - \vec{d}\bullet\vec{c})^2$$

For at afmystificere den måske totale mystik i de stedfundne manipulationer, vil vi nu give de relevante vektorer koordinater:

8) $$\vec{c} = \begin{pmatrix} 2f \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{og} \quad \vec{d} = \begin{pmatrix} s \\ t \end{pmatrix}$$

fordi vi vælger et koordinatsystem, hvor *x*–aksen er parallel med linjestykket *AB*, og så får vi, at

$$\vec{b} = -0.5\vec{c} + \vec{d} = \begin{pmatrix} s-f \\ t \end{pmatrix}$$



Hvis vi så indsætter i 7), får vi, at:

9) $$4m^2 \begin{pmatrix} s-f \\ t \end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix} s-f \\ t \end{pmatrix} = \left(2m^2 - \begin{pmatrix} s \\ t \end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix} 2f \\ 0 \end{pmatrix}\right)^2$$

hvilket kan omarbejdes til

$$4m^2\left((s-f)^2 + t^2\right) = \left(2m^2 - 2fs\right)^2$$

hvilket så efter ret megen møje bliver til

$$4m^2s^2 + 4m^2f^2 - 8m^2fs + 4m^2t^2 = 4m^4 + 4f^2s^2 - 8m^2fs$$

Hvis vi ordner slutresultatet i den foregående rodebutik, får vi, at

10) $$(4m^2 - 4f^2)s^2 + 4m^2t^2 = 4m^4 - 4m^2f^2$$

som så kan omskrives til

11) $$\frac{s^2}{m^2} + \frac{t^2}{m^2 - f^2} = 1$$

Og nu skal vi forestille os, at vores ellipse har centrum i punktet *D* med koordinaterne (x_0, y_0) og at punktet *C* på ellipsens periferi har koordinaterne (x, y), hvilket igen medfører, at

$$\vec{d} = \overrightarrow{DC} = \begin{pmatrix} s \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x - x_0 \\ y - y_0 \end{pmatrix}$$

Det giver så det næsten endelige udtryk for ellipsens ligning

12) $$\frac{(x-x_0)^2}{m^2} + \frac{(y-y_0)^2}{m^2 - f^2} = 1$$

hvilket giver ligningen for en fladtrykt ellipse med centrum i (x_0, y_0) og med brændpunkterne parallelt anbragt med *x*–aksen i indbyrdesafstanden $2f$ og med $2m$ som storakse.

Hvis man gennemtænker en anden relevant mulighed for brændpunkternes placering parallelt med *y*–aksen, får man, at

13) $$\frac{(x-x_0)^2}{m^2 - f^2} + \frac{(y-y_0)^2}{m^2} = 1$$

Det er så de to typer ellipseligninger, vi vil beskæftige os med.