Matematisk systematik og stringens og Herons formel

Ole Witt-Hansen, Køge Gymnasium

Et af de forhold, der især efter 2005–reformen har karakteriseret undervisningen i matematik og fysik er, at det er blevet nødvendigt at skulle argumentere for faglige pædagogiske forhold, som for ikke så mange år siden blev anset for a priori indlysende.

Mest oplagt er naturligvis, at man først og fremmest går i skole for at lære noget objektivt fagligt, og at undervisningen i matematik og fysik – i hvert tilfælde for en del af eleverne – skulle være på et fagligt teoretisk niveau. Dette blandt andet for at videreuddanne højt kvalificerede ingeniører, som fortsat er en nødvendig forudsætning for samfundets fortsatte udvikling.

Det er lidt beskæmmende, at vi i dag er nødt til at importere ingeniører, som kan andet end at lave synopser og tværfagligt samarbejde med internettet som fagligt fundament.

Hvorfor dette er tilfældet, kan man ævle om i uendelighed, men bemærkelsesværdigt er det dog, at man efter reformen skelner mellem fagene matematik og fysik (som man tidligere ikke behøvede at forklare, hvad var) og undervisningsfagene matematik og fysik.

Fx kan det i ramme alvor i dag diskuteres, hvorvidt man skal gennemføre beviser i matematik! Og hvorvidt man skal lave formelle analytiske udledninger i fysik! Og dette bliver ofte begrundet med, at eleverne ikke længere behersker den slags fra matematikundervisningen.

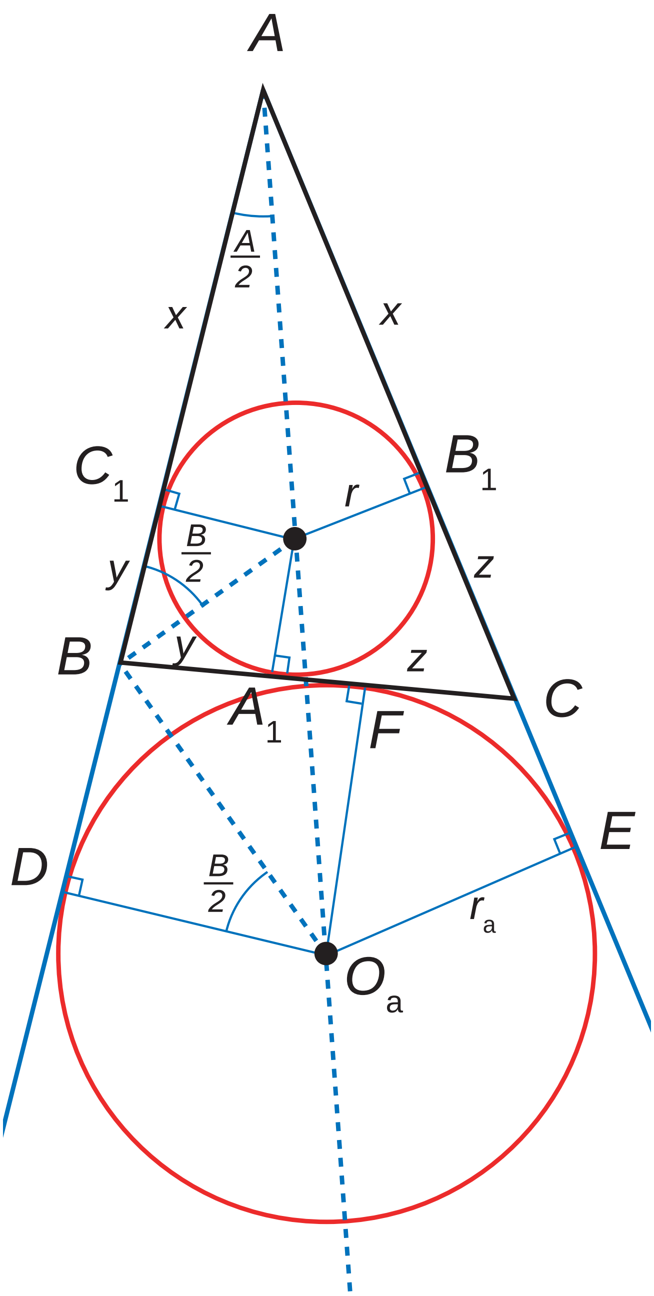
En anden ting er, at den tidligere helt klare opdeling af matematik i discipliner: Algebra (aritmetik), plangeometri, analytisk geometri, vektorregning, trigonometri, differentialregning osv. delvis er gået i opløsning.

Hvor matematikundervisningen tidligere blev formidlet på grundlag af stringens og streng systematik ligner matematikundervisningen i dag mere en tyrkisk gadehandel, hvor alt (af tvivlsom oprindelse) ligger hulter til bulter og falbydes discount.

Men nu til Herons formel

I mere end 10 år, har LMFK bladet bragt utallige beviser for Herons formel. Hvorfor ved jeg ikke, men jeg mener altså (og sådan er det jo også), at Herons formel hører til plangeometrien. Ikke til trigonometrien eller algebraen.

Da jeg efter 1988–reformen bemærkede, at der i lærebøgerne var indføjet et afsnit om plangeometri, syntes jeg umiddelbart, at det var en god ide, da eleverne jo ikke længere lærte matematik i folkeskolen. Men da jeg så fremstillingen, blev jeg meget skuffet.



Plangeometrien er par excellence et område, hvor man kan illustrere matematikkens aksiomatiske deduktive opbygning. Men "matematik" var jo ikke matematik længere, så man havde valgt en anden vej.

I frustration skrev jeg et hefte: *"Elementær Plangeometri"*, der indleder med 5 aksiomer, og hvor resten strengt logisk bygger på disse 5 aksiomer samt de følgende sætninger ved korrekt bevisførelse.

Jeg ville afslutte heftet med en udledning af Herons formel, som jeg kunne huske, at vi gjorde i mellemskolen, men jeg kunne ikke finde ud af det. Ved hjælp fra en nu pensioneret matematiklærer, lykkedes det at reetablere beviset fra vores mellemskole.

Beviset har efter min opfattelse en matematisk æstetik, som man ikke finder i de trigonometriske beviser.

Kaldes trekantens sider for a, b og c, den halve perimeter for s, så er $2s = a + b + c$. For trekantens areal T gælder så Herons formel:

$$T = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$$

På figuren nedenfor er tegnet en trekant, dens indskrevne cirkel, samt den ydre røringscirkel til siden a. Den ydre røringscirkel tangerer forlængelsen af siderne b og c, samt siden a.

Centrum for den ydre røringscirkel OA ligger på vinkelhalveringslinien for $\angle A$, samt vinkelhalveringslinierne for supplementvinklerne for $\angle A$ og $\angle C$. Radius i den ydre røringscirkel betegnes r_a.

Røringspunkterne for den indskrevne cirkel på siderne a, b og c betegnes med A_1, B_1 og C_1. Afstanden fra en vinkelspids til røringspunktet for den indskrevne cirkel betegnes x, y og z. Der gælder:

$$y + z = a, \quad x + z = b \quad \text{og} \quad x + y = c$$

hvoraf følger, at

$$2x + 2y + 2z = a + b + c = 2s \quad \Rightarrow \quad x + y + z = s$$

Subtraheres fra denne ligning $y + z = a$, finder man $x = s - a$ og to tilsvarende ligninger, ialt

$$x = s - a \quad \text{og} \quad y = s - b \quad \text{og} \quad z = s - c.$$

Endvidere har man, idet $AD = AE$:

$$AD = AB + BD = AB + BF \;\text{ og }\; AE = AC + CE = AC + CF$$

Ved addition af disse to ligninger findes:

$$AD + AE = 2AD = 2AE = AB + AC + BF + CF$$

$$= c + b + a = 2s \quad \Rightarrow$$

$$AD = AE = s$$

Dvs. afstanden fra en vinkelspids til tangeringspunktet for den ydre røringscirkel for den modstående side er lig med trekantens halve perimeter. Endvidere får man:

$$BD = AD - AB = s - c$$

og tilsvarende for de andre stykker.

Vi er nu rede til at opstille nogle forhold for nogle ensvinklede trekanter. Da vinkelhalveringslinierne for to supplementvinkler er ortogonale (tilsammen er de to halveringsvinkler for 180° jo 90°) er

$$\angle OBC_1 = 90° - \angle O_aBD \Rightarrow \angle BO_aD = \angle OBC_1 = ½B.$$

Vi har da: $\Delta BOC_1 \sim \Delta O_aBD$, som giver:

$$\frac{|OC_1|}{|BD|} = \frac{|BC_1|}{|O_aD|} \quad \Rightarrow \quad \frac{r}{s-c} = \frac{s-b}{r_a}$$

Tilsvarende finder man idet $\Delta AOC_1 \sim \Delta AO_aD$

$$\frac{|OC_1|}{|O_aD|} = \frac{|AC_1|}{|AD|} \quad \Rightarrow \quad \frac{r}{r_a} = \frac{s-a}{s}$$

Multipliceres de to ligninger med hinanden, finder man, idet r_a kan bortforkortes:

$$r^2 = \frac{(s-a)(s-b)(s-c)}{s}$$

Anvendes derefter formlen $T = r \cdot s$, fremkommer Herons formel.

$$T = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$$