Smart anvendelse af den naturlige logaritme

Helge Bennedsen, helge_bennedsen@mail.dk

Den naturlige logaritme har mange overraskende anvendelsesmuligheder. Lad os straks se en af dem an!

Vi har den positive og differentiable funktion $h(x)$ og betragter funktionen $f(x) = \ln(h(x))$, hvorom vi ved hjælp af sætningen om sammensatte differentiable funktioner kan vise, at

$$f'(x) = \ln'(h(x))\cdot h'(x) = \frac{h'(x)}{h(x)} \tag{1}$$

Nu betragter vi to positive og differentiable funktioner $g(x)$ og $h(x)$, og vi betragter en ny udgave af $f(x)$, idet

$$f(x) = \ln(g(x)\cdot h(x)) = \ln(g(x)) + \ln(h(x)) \tag{2}$$

Ved differentiation af venstre side, får vi, at

$$f'(x) = \frac{(g(x)\cdot h(x))'}{g(x)\cdot h(x)} \tag{3}$$

og ved at differentiere højre side, får vi, at

$$f'(x) = \frac{g'(x)}{g(x)} + \frac{h'(x)}{h(x)} \tag{4}$$

I begge differentiationer (3) og (4) har vi anvendt resultatet fra (1), og hvis vi et kort øjeblik glemmer sætningen om, hvorledes man differentierer et produkt af to differentiable funktioner, har vi nu et enkelt bevis for differentiationsregnereglen, idet vi ved at sætte udtrykkene fra (3) og (4) lig med hinanden får, at

$$f'(x) = \frac{(g(x)\cdot h(x))'}{g(x)\cdot h(x)} = \frac{g'(x)}{g(x)} + \frac{h'(x)}{h(x)} \Rightarrow$$

$$\frac{(g(x)\cdot h(x))'}{g(x)\cdot h(x)}\cdot g(x)\cdot h(x)$$

$$= g(x)\cdot h(x)\cdot\frac{g'(x)}{g(x)} + g(x)\cdot h(x)\frac{h'(x)}{h(x)} \Rightarrow$$

$$(g(x)\cdot h(x))' = g'(x)\cdot h(x) + g(x)\cdot h'(x) \tag{5}$$

hvor $g(x)$ og $h(x)$ begge er positive differentiable funktioner.

Vi vil gerne bevise den i forvejen velkendte sætnings gyldighed i de tilfælde, hvor de angivne funktioners fortegn kan være hvad som helst. Derfor vælger vi tallene b og d, der begge er større end nul, således, at $g(x)+b>0$ og $h(x)+d>0$ i et passende interval omkring x.

Nu kan vi bruge slutresultatet fra (5) og får så, at

$$\begin{aligned}&\big((g(x)+b)\cdot(h(x)+d)\big)'\\ &= (g(x)+b)'\cdot(h(x)+d) + (g(x)+b)\cdot(h(x)+d)'\\ &= g'(x)\cdot(h(x)+d) + (g(x)+b)\cdot h'(x)\\ &= \big(g'(x)\cdot h(x) + g(x)\cdot h'(x)\big) + \big(d\cdot g'(x) + b\cdot h'(x)\big)\end{aligned}$$

der så mere kortfattet kan skrives som

$$\begin{aligned}&\big((a\cdot g(x)+b)\cdot(c\cdot h(x)+d)\big)'\\ &= a\cdot c\big(g'(x)\cdot h(x)+g(x)\cdot h'(x)\big)+\big(a\cdot d\cdot g'(x)+b\cdot c\cdot h'(x)\big)\end{aligned}$$

Hvis vi så kigger på ovenstående venstreside, får vi, at

$$\begin{aligned}&\big((g(x) + b)\cdot(h(x) + d)\big)'\\ &= \big(g(x)\cdot h(x) + d\cdot g(x) + b\cdot h(x) + b\cdot d\big)'\\ &= \big(g(x)\cdot h(x)\big)' + d\cdot g'(x) + b\cdot h'(x) + 0\end{aligned}$$

Hvis vi sammenligner de to foregående udtryks yderste højresider, får vi, at

$$(g(x)\cdot h(x))' = g'(x)\cdot h(x) + g(x)\cdot h'(x) \tag{6}$$

Hvilket nok ikke er så overraskende. Og hvis man tænker lidt mere over, hvad det er man har gjort undervejs, før man forkynder bevisgangen for en forsamling, er det her såmænd ikke værre end så meget anden undervisningsforkyndelse.