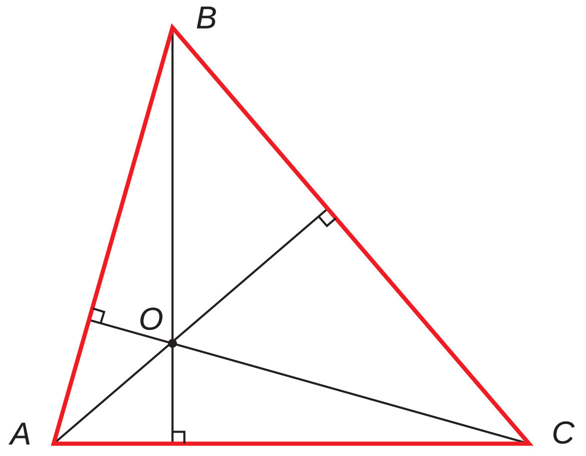
En sætning om højder

Helge Bennedsen, helge_bennedsen@mail.dk



Ovenstående rimeligt vellykkede trekant *ABC* har tre højder tegnet ind, med det fælles skæringspunkt *O* angivet på figuren. Der gælder følgende lidt løjerlige sætning for spidsvinklede trekanter:

Om højdernes fælles skæringspunkt i en spidsvinklet trekant *ABC*, med sidelængderne a, b og c, hvor $a = |BC|$, $b = |AC|$ og $c = |AB|$ gælder der, at

$$|AO| = \frac{a}{\tan(A)} \qquad |BO| = \frac{b}{\tan(B)} \qquad |CO| = \frac{c}{\tan(C)}$$

Bevis

Vi vil kigge nærmere på trekant *AOC*, hvorom det ved lidt nærkikkeri hurtigt indses, at $\angle CAO = 90° - \angle C$, $\angle OCA = 90° - \angle A$ og $\angle AOC = \angle A + \angle C = 180° - \angle B$. Vi bruger nu sinusrelationen på trekant AOC, og får så, at

$$\frac{|CO|}{\sin(90° - C)} = \frac{|AC|}{\sin(180° - B)} \Leftrightarrow \frac{|CO|}{\cos(c)} = \frac{b}{\sin(B)}$$

og hvis vi så benytter, at $\frac{b}{\sin(B)} = \frac{c}{\sin(C)}$ får vi, at

$$\frac{|CO|}{\cos(C)} = \frac{c}{\sin(C)} \Leftrightarrow |CO| = \frac{c}{\tan(C)}$$

Det samme resultat ville vi også have opnået, hvis vi havde taget udgangspunkt i trekant *BOC*, hvilket så ved lidt videre tankegang underbygger den kendsgerning, at højderne skærer hinanden i samme punkt, hvilket vi nok stort set alle vidste i forvejen. Ved at studere det budskab, som formlen for $|CO|$ rummer, indses det let, at formlerne for de to andre længder $|BO|$ og $|AO|$ gælder.

Muligvis vil arkitekter og trafikbrobyggere med fordel kunne anvende den beviste sætning, der i øvrigt er ganske smuk, og faktisk har forbløffet mig. Jeg er for tiden i gang med at undersøge mulighederne for en rimeligt elevvenlig udledelse af Herons smukke formel for en trekants areal. Og det er i forbindelse dermed, at jeg pludselig producerede denne artikels sætning, som jeg ikke har set før.