Rødder i tredjegradsligningen

Helge Bennedsen, helge_bennedsen@mail.dk

Da min søn Lars i året 1993/94 gik i 3g på Gammel Hellerup Gymnasium, snakkede vi engang imellem matematik, og så var det, at jeg for sjov skyld, vist nok fordi hans matematiklærer havde omtalt tredjegradsligninger i en eller anden sammenhæng, at jeg præsenterede min søn for en lidt anden version af tredjegradslignings–løsnings–problematikken.

Mit udgangspunkt var den grufulde tanke, at det faktisk er muligt at finde samtlige reelle rødder til tredjegradsligninger af typen $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$, hvor a, b, c og d er reelle tal, og a naturligvis forskellig fra nul, uden at komplekse tal optræder undervejs i udregningerne.

Hvis italieneren, der i 1500'tallet formodentlig var den første, der fandt en generel metode til løsning af tredjegradsligninger, havde benyttet den metode, jeg om lidt fremlægger, var der nok gået måske mindst to til tre århundreder før de komplekse tal var *"opfundet"*.
Til sagen! Vores udgangspunkter er følgende formler, som jeg ikke vil bevise:

$$\cos(3u) = 4\cos^3(u) - 3\cos(u) \qquad (1)$$

$$\cosh(3u) = 4\cosh^3(u) - 3\cosh(u) \qquad (2)$$

$$\sin(3u) = -4\sin^3(u) + 3\sin(u) \qquad (3)$$

$$\sinh(3u) = 4\sinh^3(u) + 3\sinh(u) \qquad (4)$$

Så tager vi fat på en tredjegradsligning af typen $1 = L\cdot t^3 + M\cdot t$, hvor L og M er reelle tal, og hvor L ikke er lig med nul. Nu laver vi en smart substitution, hvor vi indsætter $t = z\cdot x$, hvor z er positiv, og får så, at

$$1 = (L\cdot z^3)x^3 + (M\cdot z)x$$

Vi bestemmer så z ud fra følgende krav:

$$\frac{|L\cdot z^3|}{|M\cdot z|} = \frac{4}{3} \Leftrightarrow z = \sqrt{\frac{4\cdot|M|}{3\cdot L|}}$$

Det giver os fire forskellige tilfælde:

a) Hvis L og M begge er positive får vi følgende ligning

$$4x^3 + 3x = \frac{\sqrt{27L}}{\sqrt{4M^3}}$$

b) Hvis L og M begge er negative får vi følgende ligning

$$4x^3 + 3x = -\frac{\sqrt{27\cdot|L|}}{\sqrt{4\cdot|M|^3}}$$

c) Hvis L er positiv og M negativ får vi følgende ligning

$$4x^3 - 3x = \frac{\sqrt{27L}}{\sqrt{4\cdot|M|^3}}$$

d) Hvis L er negativ og M positiv får vi følgende ligning

$$4x^3 - 3x = -\frac{\sqrt{27\cdot|L|}}{\sqrt{4M^3}}$$

Nu har vi faktisk et matematisk *"tagselvbord"*, og lad os se på et konkret eksempel på en tredjegradsligning,

$$y^3 - 6y^2 - 7y + 43 = 0$$

hvor vi straks indsætter $y = t + 6/3 = t + 2$ og får

$$(t + 2)^3 - 6(t + 2)^2 - 7(t + 2) + 43 = 0$$

som reduceres til $t^3 - 19t = -13$, der så omskrives til

$$1 = \left(-\frac{1}{13}\right)t^3 + \left(\frac{19}{13}\right)t$$

hvor vi er i situation d) med $L = -1/13$ og $M = 19/13$
Vi omskriver så udtrykket til ligningen

$$4x^3 - 3x = -\frac{\sqrt{27\cdot\frac{1}{13}}}{\sqrt{4\cdot\left(\frac{19}{13}\right)^3}} \approx -0{,}4078165$$

Vi benytter formel (1), hvor vi straks indser, at

$$x = \cos(u) \wedge \cos(3u) = -0{,}4078165$$

der giver tre interessante muligheder:

$3u = 114{,}0677° \Rightarrow u = 38{,}02258°$
$3u = 114{,}0677° + 360° \Rightarrow u = 158{,}02258°$
$3u = 114{,}0677° - 360° \Rightarrow u = -81{,}97741°$

hvilket så giver de tre løsninger

$x = 0{,}78768$ $\quad$ $x = -0{,}92733$ $\quad$ $x = 0{,}13956$

Nu skal vi bruge, at $t = z \cdot x$, hvor

$$z = \sqrt{\frac{4 \cdot |M|}{3 \cdot |L|}} = \sqrt{\frac{4 \cdot \frac{19}{13}}{3 \cdot \frac{1}{13}}} \approx 5{,}03322$$

Vi får $t = 3{,}96456$, $t = -4{,}66746$ og $t = 0{,}70243$. Da vi startede dette cirkus, havde vi ligningen

$y^3 - 6y^2 - 7y + 43 = 0$, hvor $y = t + 2$

og så ender vi med nogle rimeligt gode løsninger

$y = 5{,}96456$ $\quad$ $y = -2{,}66746$ og $y = 2{,}70243$.

Vi vil nu prøve kræfter med et andet eksempel $y^3 - 6y^2 - 7y - 17 = 0$, som vi igen manipulerer med, idet vi indsætter $y = t + 2$, og får følgende $(t + 2)^3 - 6(t + 2)^2 - 7(t + 2) - 17 = 0$, der kan omskrives til $t^3 - 19t = 47$, der omskrives til

$$1 = \frac{1}{47}t^3 - \frac{19}{47}t$$

hvor vi straks ser, at $L = 1/47$ og $M = -19/47$, og vi bestemmer z.

$$z = \sqrt{\frac{4 \cdot |M|}{3 \cdot |L|}} = \sqrt{\frac{4 \cdot \frac{19}{47}}{3 \cdot \frac{1}{47}}} \approx 5{,}033222975$$

Derefter omskriver vi ligningen efter recepten, hvor $t = z \cdot x$

$$4x^3 - 3x = \frac{\sqrt{27L}}{\sqrt{4 \cdot |M|^3}} = \frac{\sqrt{27 \cdot \frac{1}{47}}}{\sqrt{4 \cdot \left(\frac{19}{47}\right)^3}} = 1{,}47441365$$

hvor der ikke kan herske tvivl om, at løsningen er følgende

$$x = \cosh(u) \wedge \cosh(3u) = 1{,}47441365$$

Dvs. $3u = 0{,}9391781193$, $u = 0{,}3130593731$, $x = 1{,}049404612$ og $t = z \cdot x = 5{,}281888$, hvorefter vi får, at $y = t + 2 = 7{,}281888$. Ligningen $y^3 - 6y^2 - 7y - 17 = 0$ har altså løsningen $y = 7{,}28188$ afrundet til 5 decimaler.