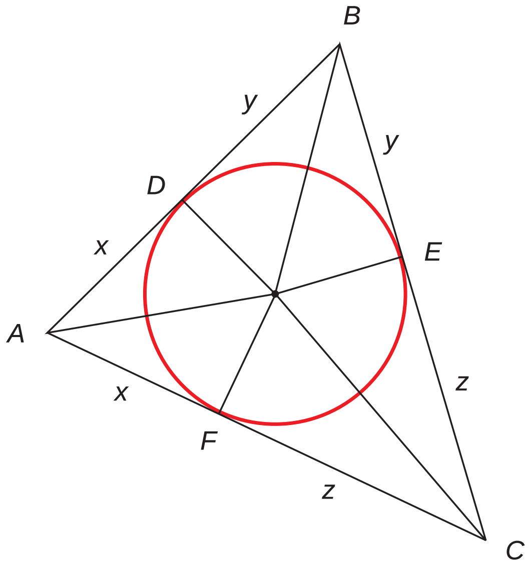
Herons Formel

Hel ge Bennedsen, helge_bennedsen@mail.dk

Vi stirrer først på nedenstående trekant ABC, der er udstyret med en indskreven cirkel:



Den indskrevne cirkel har et centrum som vi kalder O, og som vi må tænke os til, da det ikke er angivet med navn på ovenstående trekant. Den indskrevne cirkel har radius lig med r således, at

1) $r = |DO| = |EO| = |FO|$

og linjestykkerne AO, BO, og CO er vinkelhalveringslinjestykker, der hver for sig halverer den vinkel de udgår fra. Der er på figuren angivet størrelserne x, y, og z, der opfylder følgende betingelser:

2) $x = |AD| = |AF| \quad y = |BD| = |BE| \quad z = |CF| = |CE|$

hvilket jeg overlader til læseren at fundere over. Jeg håber, at vi er enige. Vi indfører størrelsen s, der er defineret således, at $2s = a + b + c$, og hvis vi lader blikket og tankerne hvile på trekant ABC, ses det med al tydelighed, at

3) $s = x + y + z$

Det er forhåbentligt velkendt, at trekantens areal T er givet som

4) $T = 0{,}5\cdot(a + b + c)\cdot r = r\cdot(x + y + z)$

således, at vi kan drage i felten. Vi får undervejs brug for nogle trigonometriske formler, som jeg vil nøjes med at angive uden først at bevise dem:

5) $$\tan(u + v) = \frac{\tan(u) + \tan(v)}{1 - \tan(u)\cdot\tan(v)} \quad \text{og}$$

$$\tan(90^\circ - u) = \frac{1}{\tan(u)}$$

Ved endnu engang at kigge på trekant ABC får vi, at

6) $$\tan\left(\frac{A}{2}\right) = \frac{r}{x} \qquad \tan\left(\frac{B}{2}\right) = \frac{r}{y} \qquad \tan\left(\frac{C}{2}\right) = \frac{r}{z}$$

Så kigger vi dernæst på følgende matematiske leg:

$$\tan\left(\frac{A}{2} + \frac{B}{2}\right) = \tan\left(\frac{A}{2} + \frac{B}{2} + \frac{C}{2} - \frac{C}{2}\right)$$
$$= \tan\left(90^\circ - \frac{C}{2}\right) = \frac{1}{\tan\left(\frac{C}{2}\right)}$$

der kan reduceres til: $\tan\left(\frac{A}{2} + \frac{B}{2}\right) = \frac{1}{\tan\left(\frac{C}{2}\right)}$, og ved anvendelse af 5) får vi efter at sunde os en smule, at

7) $$\frac{\tan\left(\frac{A}{2}\right) + \tan\left(\frac{B}{2}\right)}{1 - \tan\left(\frac{A}{2}\right)\cdot\tan\left(\frac{B}{2}\right)} = \frac{1}{\tan\left(\frac{C}{2}\right)}$$

Ved at kombinere 7) med 6) får vi følgende interessante ligning:

8) $$\frac{\frac{r}{x} + \frac{r}{y}}{1 - \frac{r}{x}\cdot\frac{r}{y}} = \frac{1}{\frac{r}{z}}$$, der kan omskrives til

$$\frac{r\cdot(x + y)}{x\cdot y - r^2} = \frac{z}{r}$$ der igen kan omskrives til

$$r^2\cdot(x + y) = x\cdot y\cdot z - z\cdot r^2 \Leftrightarrow r^2 = \frac{x\cdot y\cdot z}{x + y + z}$$

Hvis vi kaster et blik på 4), ser vi, at kvadratet på arealet T kan skrives således:

9) $$\begin{aligned} T^2 &= r^2\cdot(x + y + z)^2 \\ &= \frac{x\cdot y\cdot z}{x + y + z}\cdot(x + y + z)^2 \\ &= (x + y + z)\cdot x\cdot y\cdot z \end{aligned}$$

hvilket kan videreresoneres til udtrykket

$$T^2 = (x + y + z)\cdot x\cdot y\cdot z$$

Vi skal igen kaste et blik på trekant ABC og ser nu, at

10) $a = y + z = x + y + z - x = s - x \Leftrightarrow x = s - a$
11) $b = x + z = x + y + z - y = s - y \Leftrightarrow y = s - b$
12) $c = x + y = x + y + z - z = s - z \Leftrightarrow z = s - c$

Og hvis vi så stadig husker, at $s = a + b + c$, får vi ved at kombinere udtrykkede 9), 10), 11) og 12), at

13) $T^2 = (x+y+z)\cdot x\cdot y\cdot z = s\cdot(s-a)\cdot(s-b)\cdot(s-c)$

der blot er ensbetydende med Herons arealformel

$$T = \sqrt{s\cdot(s-a)\cdot(s-b)\cdot(s-c)}$$

hvor $s = \dfrac{a+b+c}{2}$.

Jeg må til slut erklære, at Herons oprindelige geometriske bevis har en uovertruffen skønhed, som det er svært at konkurrere med, uanset hvilken bevisform man vil bruge.