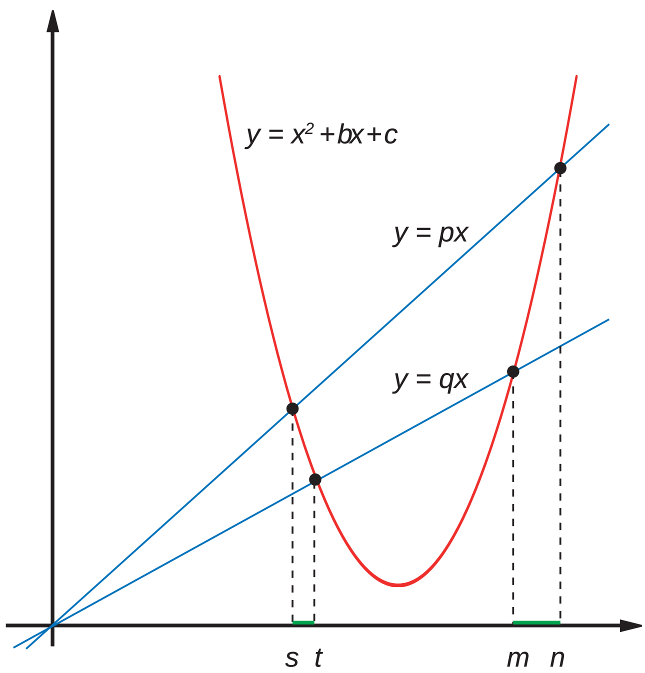
Et par egenskaber ved parablen

Jens Carstensen, Tårnby Gymnasium &
Alija Muminagić, Nykøbing

Vi skal vise et par simple, men nok ikke så kendte egenskaber ved parabler.

Egenskab 1

Vi trækker to linjer gennem (0, 0), som hver skærer parablen med ligningen $y = x^2 + bx + c$ i to punkter. De fire skæringspunkter danner to intervaller på x–aksen som vist. Da er forskellen mellem intervallængderne den samme som forskellen mellem linjernes hældninger.



Lad linjernes ligninger være $y = px$ og $y = qx$. Vi finder x–koordinaterne til skæringspunkterne ved at løse

$$x^2 + bx + c = px \quad \Leftrightarrow \quad x^2 + (b-p)x + c = 0$$

Løsningerne betegnes s og n, så vi efter sætningen om røddernes sum i et normeret andengradspolynomium får, at

$$s + n = p - b$$

Tilsvarende får vi x–koordinaterne til den anden linjes skæringspunkter med parablen ved at løse

$$x^2 + bx + c = qx \quad \Leftrightarrow \quad x^2 + (b-q)x + c = 0$$

hvor vi med rødderne m og t får $m + t = q - b$

Men så er forskellen mellem intervallængderne

$$(n - m) - (t - s) = (s + n) - (m + t) = (p - b) - (q - b) = p - q$$

hvilket skulle vises.

Egenskab 2

To rette linjer gennem punktet $(x_0, 0)$ på x–aksen $(x_0 \neq 0)$ har skæringspunkter med parablen med ligningen $y = ax^2$, hvis x–koordinater har samme reciproksum. Dette betyder, at hvis x–koordinaterne til skæringspunkterne mellem parablen og de to linjer er s og t, henholdsvis u og v, er

$$\frac{1}{s} + \frac{1}{t} = \frac{1}{u} + \frac{1}{v} = \frac{1}{x_0}$$

En ret linje med ligningen $y = px + q$ (hvor $p \neq 0$) skærer parablen i punkter med x–koordinater s og t og x–aksen i $(x_0, 0) = \left(-\frac{q}{p}, 0\right)$.

Skæringspunkternes x–koordinater fås af

$$ax^2 = px + q \quad \Leftrightarrow \quad x^2 - \frac{p}{a}x - \frac{q}{a} = 0$$

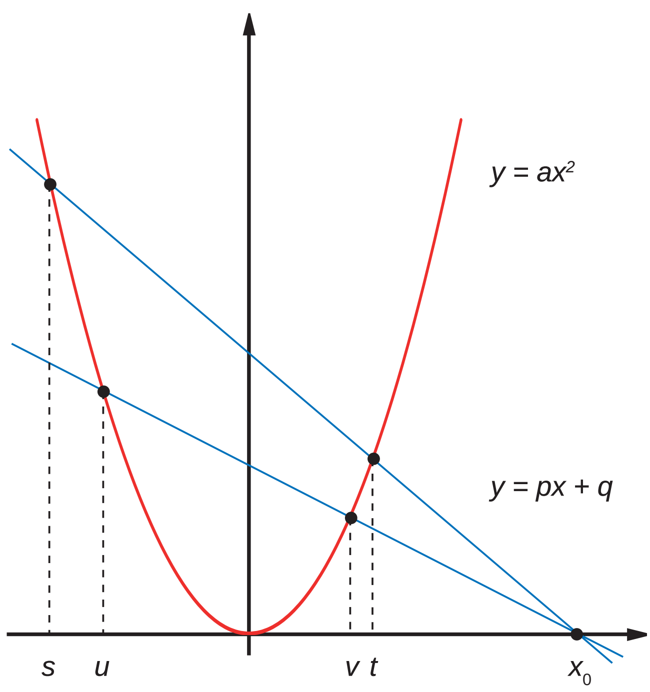
Sætningen om røddernes sum og produkt giver

$$s + t = \frac{p}{a} \qquad \text{og} \qquad s \cdot t = -\frac{q}{a}$$

Altså er

$$\frac{1}{s} + \frac{1}{t} = \frac{s + t}{s \cdot t} = \frac{\frac{p}{a}}{-\frac{q}{a}} = -\frac{p}{q} = \frac{1}{x_0}$$

Denne reciproksum afhænger kun af x_0 så den er konstant for alle linjer gennem punktet $(x_0, 0)$.



Matematik