Mere om periodiske funktioner

Jens Carstensen, Tårnby Gymnasium &
Alija Muminagić, Nykøbing Falster Gymnasium

Vi giver endnu en lille sætning om periodiske funktioner, som nok ikke er så kendt.

Sætning. Funktionen *f* defineret ved

$$f(x)=\begin{cases}-1 & \text{for} \quad x\in Q\\ 1 & \text{for} \quad x\in R\setminus Q\end{cases}$$

har ethvert rationalt tal som periode.

Bevis. Lad T være et positivt rationalt tal. Vi ser på to tilfælde.

I. Lad først x være et irrationalt tal. Efter definitionen er $f(x) = 1$. Tallet $x + T$ er irrationalt, så $f(x + T) = 1$. Altså er $f(x) = f(x + T)$.

II. Lad derefter x være et rationalt tal. Så er $f(x) = -1$. Nu er $x + T$ rationalt, så $f(x + T) = -1$. Igen er $f(x) = f(x + T)$. Funktionen f er derfor periodisk med ethvert rationalt tal som periode.

Funktionen g defineret ved

$$g(x)=\begin{cases}1 & \text{for} \quad x\in Q\\ -1 & \text{for} \quad x\in R\setminus Q\end{cases}$$

har også ethvert rationalt tal som periode.

Periodiske funktioner II

Flemming Jørgensen, pens. fra Næstved Gymnasium og HF,
fjbj10@mail.dk

I sidste nummer af LMFKbladet, nr. 6, november 2010, viser Jens Carstensen og Alija Muminagic (JC&AM) to resultater for en funktion $f(x)$ med periode T – dvs. en funktion, der opfylder $f(x + T) = f(x)$ for alle x. Idet $f'(x)$ betegner den afledede og $F(x)$ en stamfunktion, kan disse resultater – i lidt løs formulering – samles således:

> *Medens $f'(x)$ altid vil være periodisk med periode T, så vil $F(x)$ aldrig være det.*

Jeg er enig i udsagnet om den afledede, der kunne være vist lettere således: Differentiation af den givne identitet $f(x + T) = f(x)$ på begge sider af lighedstegnet viser, at $f'(x + T)\cdot(x + T)' = f'(x + T)$ er lig $f'(x)$.

Et simpelt eksempel viser imidlertid, at udsagnet om stamfunktionen *ikke* har generel gyldighed[1)]: $F(x) = \sin(x)$ har samme periode $T = 2\pi$ som $f(x) = \cos(x)$. På den anden side er det rigtigt, at $F(x) = \sin(x) + x$ er en ikke–periodisk stamfunktion til den periodiske $f(x) = \cos(x) + 1$.

Et rigtigt alternativ til JC&AM's to resultater er følgende:

[1)] Fejlen i JC&AM's bevis består i, at de i deres sidste linje kun kan konkludere, at differensen $H(x) - F(x)$ $(= -ax - c)$ ikke kan være periodisk.

Medens den afledede $f'(x)$ altid er periodisk med perioden T, så gælder det samme for stamfunktionen $F(x)$ når og kun når, middelværdien

$$\bar{f} \equiv \tfrac{1}{T}\int_0^T f(x)dx \qquad (1)$$

er nul. I det generelle tilfælde kan $F(x)$ skrives som

$$F(x) = F_0(x) + \bar{f}\cdot x \qquad (2)$$

hvor $F_0(x)$ er stamfunktion til den funktion $f_0(x)$, der defineres ved $f(x) = f_0(x) + \bar{f}$ – og dermed har middelværdien $\bar{f}_0 = 0$. Funktionen $F_0(x)$ er periodisk med perioden T.

Bevis

Udsagnet om $f'(x)$ er bevist. $F_0(x)$ i formlen (2) kan åbenbart skrives som

$$F_0(x) = F_0(0) + \int_0^x f_0(t)dt \qquad (3)$$

Det følger umiddelbart at

$$F_0(x+T) - F_0(x) = \int_0^T f_0(t)dt = T\cdot\bar{f}_0 = 0 \qquad (4)$$

For funktionen $F(x)$ i (2) haves nu $F(x+T) - F(x) = \bar{f}\cdot T$.

Den er altså periodisk med periode T hvis og kun hvis $\bar{f} = 0$.

Q.E.D.