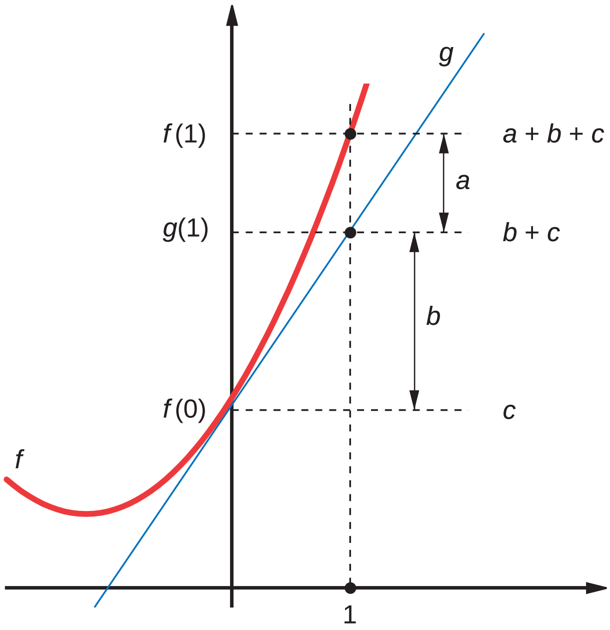
Andengradspolynomiets koefficienter

Jens Carstensen, Tårnby Gymnasium

Koefficienterne a, b og c i det almindelige andengradspolynomium $f(x) = ax^2 + bx + c$ kan illustreres på en simpel figur. Vore elever får bedre indblik i parablens 'mekanismer' ved at se koefficienterne afbildet. Måske er det ikke alle, der har figuren forrest i hukommelsen, så vi bringer den her.



Grafen for f (parablen) skærer y–aksen i $f(0) = c$ og da $f'(x) = 2ax + b$, er $f'(0) = b$ og derfor har tangenten til parablen i punktet $(0, c)$ ligningen $y = bx + c$. Vi betegner den lineære funktion, der har tangenten som graf, med g, så $g(x) = bx + c$.

Så er $f(0) = c$, $g(1) = b + c$ og $f(1) = a + b + c$.

Derfor findes koefficienterne a og b som de angivne afstande på figuren – regnet med fortegn. Koefficienten c er der gjort rede for.

Et interessant ligningssystem

Jens Carstensen, Tårnby Gymnasium

Det er praktisk at have et ligningssystem med to ubekendte af 1. grad med 'pæne' løsninger på lager. Hvis vi fx prøver med

$$\begin{aligned} 5x + 6y &= 7 \\ 6x + 7y &= 8 \end{aligned}$$

opdager vi, at løsningen er $(x, y) = (-1, 2)$. At x og y er hele tal følger af, at determinanten er -1. Det samme gælder så for systemet

$$\begin{aligned} 4x + 5y &= 6 \\ 5x + 6y &= 7 \end{aligned}$$

og her er løsningen (overraskende nok) også $(x, y) = (-1, 2)$. Vi lugter lunten og ser på systemet

$$\begin{aligned} (a-1)\cdot x + ay &= a + 1 \\ ax + (a+1)\cdot y &= a + 2 \end{aligned}$$

og opdager ved indsættelse, at $(x, y) = (-1, 2)$ sandelig også er løsning her for enhver værdi af a!

Linjerne, der er de grafiske billeder af ligningerne, har hældninger

$$\frac{1-a}{a} = \frac{1}{a} - 1 \quad \text{og} \quad \frac{-a}{a+1} = \frac{1}{a+1} - 1$$

så linjerne er 'næsten' parallelle. Kan vi opnå parallelitet ved fx at ændre (lidt) på koefficienten til x i den første ligning? Vi ser altså på ligningssystemet

$$\begin{aligned} ((a-1) + p)\cdot x + ay &= a + 1 \\ ax + (a+1)\cdot y &= a + 2 \end{aligned}$$

hvor determinanten d skal være 0:

$$d = (a - 1 + p)\cdot(a + 1) - a^2 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad p = \frac{1}{a+1}$$

Hvis fx $a = 99$ er $p = 0{,}01$, så ligningssystemet

$$\begin{aligned} 98{,}01x + 99y &= 100 \\ 99x + 100y &= 101 \end{aligned}$$

repræsenterer to parallelle rette linjer. Deres hældninger er

$$-\frac{99}{100} = -\frac{98{,}01}{99} .$$

Henvisning: *Aufgabe 1000: Zum Jubiläum*, Monoid, Heft 103, September 2010.

Errata

I artiklen *Periodiske funktioner* i LMFK-Bladet nr. 6, November 2010, er der desværre en fejl. Den anden sætning i artiklen skal lyde:

Sætning. En stamfunktion til en periodisk funktion er ikke nødvendigvis periodisk.