Matematik og tværfaglighed – et teoretisk blik

KASPER BJERING SØBY JENSEN,
ph.d-studerende i matematikkens didaktik
ved Roskilde Universitet

I tider, hvor man som fagperson stadigt oftere udfordres til at bringe sit fag i samspil med verden udenfor – særligt med andre fag – kan det være gavnligt at forsøge at overskue denne opgave lidt ovenfra. Ikke mindst, når man skal navigere i den moderne gymnasieskole.

Man kan naturligvis reagere defensivt på dette ved at forsøge at forsvare sin enkeltfaglige tradition mest muligt og derfor søge at mindske graden af tværfaglighed. Dette er for så vidt legitimt nok, men modsat denne artikels udgangspunkt, som er at give redskaber til at øge graden af tværfaglighed i faglige samspil med matematiks deltagelse. Er man uenig i dette mål, er man nok også uenig i mine overvejelser.

I den didaktiske forskning gøres der jævnligt forsøg på at skabe begrebsapparater, der kan analysere, forstå og udvikle fagligt samspil. Sådanne be grebsapparater løser ikke i sig selv de konkrete problemer forbundet med fagligt samspil, men et teoretisk blik kan alligevel bruges til at skabe orden, struktur og fokus i det, man foretager sig.

Det er en almendidaktisk opgave at lave en generel teori om fag, faglighed og tværfaglighed. Men hvis det skal virke i eksempelvis en gymnasiekontekst, er det min tilgang, at opgaven først og fremmest kræver en *fag*didaktisk indsats. Problemstillingen må analyseres med udgangspunkt i det fag, hvis deltagelse i tværfaglighed man ønsker at forstå.

Her vil jeg forsøge at give mit bud på såvel en generel som en matematikspecifik begrebsramme. Baggrunden er mit matematikspeciale fra 2008, hvor jeg analyserede 33 1.generations studieretningsprojekter. Da 30 af disse var i samspil med historiefaget, vil jeg give et fokuseret eksempel med udgangspunkt i denne kombination. Mit speciale er i øvrigt rapporteret i Jensen (2010).

Fag og faglighed

Ifølge 'Ordbog over det Danske Sprog' betyder *fag* "noget ved sammenføjning afgrænset". I moderne tid bruges det dog mest i betydningen "et vist område inden for videnskaben, kunst eller erhverv". Her vil jeg kun forholde mig til det, vi ud fra denne definition kunne kalde for *videnskabsfag*.

Opdelingen af videnskaben er ikke tilfældig. For at begribe den, må vi have fat i begrebet *objekt* eller *genstandsfelt,* som det også kaldes. Det, der adskiller et fag fra et andet, er grundlæggende hvilke af verdens studerbare objekter, faget søger at skabe viden om. For at kunne studere sine objekter, må faget udvikle *metoder* sammensat af *teknikker* og *valideringsformer*. Et hvert videnskabsfags kerne er således *objekt* og *metode*.

Når videnskabsfaget arbejder, producerer det *viden*, *teorier*, *begreber*, *fakta*, m.v. Disse ting vil jeg – sammen med *metoden* – under én hat kalde for videnskabsfagets *faglighed*. Fagligheden er således et fags dynamiske indre side, mens objektet findes uden for faget og er af statisk karakter.

I Dolin (2006) defineres et videnskabsfag som en "sociokulturel enhed for vidensproduktion". Et fag har så at sige en social struktur i form af tidsskrifter, bøger, konferencer, institutter, foreninger, positioner, mv. og en kulturel praksis, der udvikles inden for denne sociale struktur. Et fag er altså et menneskeligt fællesskab, som det kræver en særlig socialisering at få adgang til.

En fagperson er en person, som har gennemgået en sådan socialisering og derfor kan "begå sig" i fællesskabet. Fagpersoner udfører dog oftest deres faglige praksis andre steder end i videnskabsfaget, f.eks. ved anvendelser i andre fag eller i samfundet mere generelt og som undervisning. Faget kan under en hat opfattes som fællesmængden af fagpersonernes faglige praksisser.

Undervisningsfaget er en særligt skabt konstruktion med det formål at foretage hel eller delvis indsocialisering i faget. Undervisningsfaget bliver til ved, at et udvalg af fagets praksisser nedkopieres i et til sammenhængen passende format. Traditionelt en ren nedskalering af videnskabsfaget. Processen kaldes i matematikdidaktikken ofte for en *didaktisk transposition* (Winsløw 2006, s.18-21).

Tværfaglighed

Da videnskabens historie viser, at virkeligheden i praksis ikke lader sig studere og håndtere skarpt opdelt efter de af mennesket valgte faggrænser, har det specielt siden 2. Verdenskrig vist sig at være stadigt mere nødvendigt at etablere forskellige typer af tværfaglige praksisser. Mine studier har foreløbigt vist mig to væsensforskellige udgaver af sådanne.

For det første en *organisatorisk tværfaglighed*, hvor elementer af forskellige fag svejses sammen til en ny enhed, som selv fremstår som et selvstændigt fag. Dette sker på i hvert fald to måder:

- *Specialisering på grænsen mellem to fag*. Typisk er eksempler, hvor et fags metode viser sig anvendeligt til at studere et andet fags objekter. F.eks. biofysik og matematisk økonomi.
- *Anvendte fag*. Elementer af mange fags metoder integreres for at studere en særlig klasse af objekter. F.eks. ingeniørvidenskab, nanoteknologi, geografi og erhvervsøkonomi.

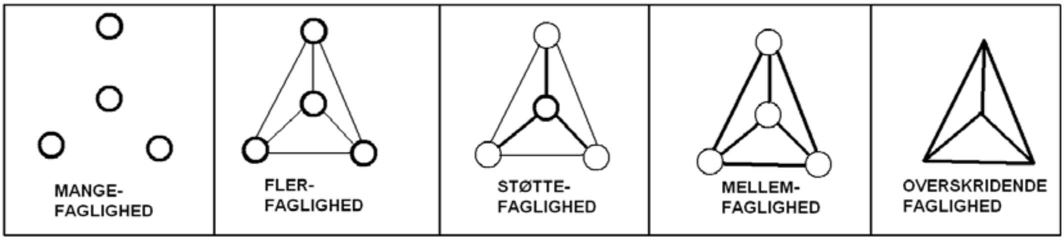
I gymnasieskolen oplever vi denne tværfaglighedsform i fagkonstruktioner som dansk (lingvistik, litteraturvidenskab, kommunikation), samfundsfag (økonomi, sociologi, politologi) og naturgeografi. Gymnasieskolen anerkender det dog ikke som tværfaglighed. Et projekt, der integrerer sociologi og økonomi, vil i gymnasieverdenen blive opfattet som enkeltfagligt.

For det andet findes en *funktionel tværfaglighed*, hvor to eller flere eksisterende fag går midlertidigt sammen for at løfte en bestemt opgave. Funktionel tværfaglighed er altså en relation mellem to eller flere fag, og det konkrete samarbejde kan karakteriseres ud fra, i hvor høj grad der lægges vægt på fag, og i hvor høj grad der lægges vægt på relation. Med inspiration fra Erich Jantsch og Lars Ulrichsen opstiller jeg på den baggrund 5 kategorier:

- *Mangefaglighed*. To eller flere fag eksisterer samtidigt. Den maksimale grad af koordinering er fælles almene mål, f.eks. "almen dannelse", "studieforberedende", mv.
- *Flerfaglighed*. To eller flere fag arbejder samtidigt med en begrænset koordination. Det kan f.eks. være at fagenes konkrete arbejde styres af et fælles tema.
- *Støttefaglighed*. Et konstituerende fag styrer ensidigt arbejdets mål, mens yderligere et eller flere støttefag bidrager til at opnå målene. Støttefagene tilpasses altså det konstituerende fags behov.
- *Mellemfaglighed*. To eller flere fag underlægges i samme proces fuldstændigt de krav, som opstilles af et ydre princip. Det kan f.eks. være en problemstilling, som skal løses.
- *Overskridende faglighed*. Alle faggrænser udviskes, og der arbejdes alene på at løse en ydre problemstilling.

De to ydertyper er ikke egentligt tværfaglige, fordi de mangler hhv. relationer og fag. Men de kan opfattes som endepunkter i et åbent interval af funktionelle tværfaglighedsgrader. Dette er illustreret på figur 1.

Gymnasieskolen er i sin grundstruktur mangefaglig. Men særligt efter reformen i 2005 har der også været lagt vægt på såkaldte *faglige samspil*, som af natur er funktionelt tværfaglige. Strukturen



Figur 1 Funktionel tværfaglighed er relationer mellem selvstændige fag og kan ordnes i et åbent interval efter hvor vidt fokus ligger mest på fag eller på relationer.

gør det dog svært for et fag at lade egne faglige mål nedtone. Derfor bliver de fleste samspil af typen *flerfaglighed*, men ind i mellem med mulighed for at tilnærme sig støtte- og mellemfaglighed. Jeg mener, at sådanne tilnærmelser er vigtige og en afgørende begrundelse for at have et teoretisk blik.

Da flerfaglighed er det mest udbredte, kan det være gavnligt at nuancere begrebet yderligere. Det vil jeg med inspiration fra Dolin (2006) gøre med følgende tre begreber:

- *Parallelforløb*. Der eksisterer et fælles emne, som styrer de deltagende fags målsætninger. Fagene arbejder minimalt koordineret, så de f.eks. kan understøtte hinandens målsætninger, men der findes ikke en fælles problemstilling eller en sammenfattende afslutning.
- *Formel flerfaglighed.* Fagene udvikler sammen et fælles forløb, hvor de hver især bidrager til en eller anden form for helhed uden dog at involvere sig i hinanden.
- *Fagintegration.* En fælles problemformulering afgør indhold og metode i samspillet. Fagene bidrager kun i relation til problemformuleringen. Bortset fra den kunstige situation, at indholdet skal tilpasses deltagende fag, ligger denne samspilstype tæt på mellemfaglighed.

Som eksempler kan man fra vejledningen til naturvidenskabeligt grundforløb finde forløbet "Vand", hvor de fire naturvidenskabelige fag hver især skal sige "noget om vand". Ligeledes kan man finde forløbet, "hvordan fungerer et batteri?", hvor fagene sammen skal besvare spørgsmålet. Det første er oplagt et parallelforløb, mens det andet er et samspil af typen fagintegration.

Matematik og tværfaglighed

Som jeg indledningsvis slog fast, kan et alment begrebsapparat ikke stå alene, hvis vi for alvor vil forstå matematiks deltagelse i tværfaglige samspil. Derfor må der opstilles særlige begreber der kan indfange forskellige typer af samspil mellem matematik og et eller flere andre fag. Gennem mine studier er jeg kommet frem til at matematiksamspil findes i mindst tre forskellige grundformer:

- *Modellering.* Typisk et samspil af støttefaglig art, hvor matematiks metoder bruges til at behandle et andet fags objekter. En særlig forkrøblet afart af denne type er at lade matematik være en regnemaskine. Fuldblodsmodellering kræver imidlertid en dyb indsigt i matematikkens faglighed for at lade sig aktivere inden for andre fag.
- *Meta-matematik*. Samspil, hvor matematikfaget bliver opfattet som et objekt i et andet fag og undersøges med dettes metoder. Det kan f.eks. være at besvare spørgsmål *om matematik* af f.eks. historisk, psykologisk, filosofisk, sociologisk, pædagogisk eller kommunikativ art. Dette vil ofte kræve, at man besidder indsigt i selve matematikfagligheden, som derfor typisk vil være til stede. En speciel variant er matematik som *case*. F.eks. at man interesserer sig for skolehistorie, og derfor studerer matematikundervisningens historie.
- *Komparativ faglighed*. Matematik og et eller flere andre fag placeres i situationer, hvor deres fagligheder lader sig sammenligne. F.eks. at sammenligne argumentationsteknik i dansk og bevisteknik i matematik eller de bidrag, som hhv. matematik og engelsk kan levere i en undersøgelse af Challenger-ulykken.

Samspil af typen modellering og meta-matematik vil som udgangspunkt ligne støttefaglige samspil, om end eksistensen af enkeltfaglige mål i gymnasiekonteksten gør det svært at lade et fags deltagelse styre alene af andre fags behov. Den komparative faglighed vil i udgangspunktet være formelt flerfaglig, hvor to fag arbejder adskilt, men bindes sammen i slutningen.

Begreberne er naturligvis ikke hverken udtømmende eller rigide. Det er eksempelvis muligt at forestille sig et ægte ikke-fagspecifikt problem fra virkeligheden, som på mellemfaglig vis løses af en række fags problemtilpassede deltagelse. Om end jeg finder sådanne tilfælde ønskelige og rosværdige, er jeg dog så godt som aldrig stødt på dem.

Eksempel på samspil: Matematik og historie

Jeg har nu i min begrebskonstruktion skabt et *generelt* begrebssæt og et *fagspecifikt* begrebssæt. Jeg vil gerne slå til lyd for yderligere en specialisering i form af et *samspilsspecifikt* begrebssæt.

Hvis vi virkelig skal i dybden med tværfaglighed, må vi således lave specifikke begreber, der kan indfange forskellige former for samspil mellem to bestemte fag. Det har jeg gjort for matematik og historie.

Gennem analyse af 30 ret tilfældigt indsamlede besvarelser af studieretningsprojekter samt den tilhørende opgaveformulering kom jeg frem til følgende fem matematik-historie-samspilstyper. En lidt anderledes organisering kan findes i Hansen (2009, s. 35-45):

- *Matematikhistorie.* Matematik gøres som fag til objekt i historiefaget – altså et metamatematisk samspil. Typiske eksempler er "egyptisk-, babylonsk- og græsk matematik", "sandsynlighedsregningens historie" og "løsningen af tredjegradsligningen".
- *Matematik og udviklingen af videnskab, teknologi og samfund.* Matematikkens overordnede betydning for menneskehedens udvikling gøres til objekt i historiefaget. Typiske eksempler er "den naturvidenskabelige revolution" og "kryptologi og krig".
- *Matematisk models historie.* Mere konkrete anvendelser af matematik gøres til objekt i historien. Der er altså typisk tale om et modelleringssamspil, der som helhed undersøges historisk. Typiske eksempler er "astronomisk navigation" og "matematik og arkitektur".
- *Matematik som historisk case.* Matematik kan som eksempel på noget mere generelt gøres til objekt i historie. Et typisk eksempel er "kvinder og matematik".
- *Modellering i historie.* Et modelleringssamspil, hvor et for historie relevant objekt underkastes matematiske metoder. Et typisk eksempel er "historiske epidemiudbrud".

De to første kategorier er mest almindelige, af 30 projekter udgjorde de hhv. 12 og 13. Den tredje er mere sjælden med 3 projekter, og de to sidste må nærmest betegnes *eksotiske* med et af hver. Der kan naturligvis sagtens eksistere flere kategorier, som jeg blot ikke er stødt på.

Eksempel på begrebsanvendelse

Matematikhistorie er en overordentlig vanskelig disciplin. Så vanskelig, at matematikhistorikeren Michael N. Fried har rejst spørgsmålet om, hvor vidt matematikundervisning og matematikhistorie overhovedet kan sameksistere (Fried 2001).

Problemet er at matematik som undervisningsfag handler om at formidle matematikfaglighed, som den tager sig ud i dag, mens matematikhistorie handler om at studere matematikfaglighed som den faktisk så ud, blev opfattet og praktiseret historisk. Disse to mål vil meget ofte være modstridende. Dette ser man også i opgaveformuleringer og -besvarelser.

Et eksempel er følgende udsagn fra en elevs opgavebesvarelse, hvor det diskuteres, hvordan oldtidens egyptere kan have fundet ud af at beregne rumfang af pyramider:

Før ægypterne kunne beregne rumfanget af en pyramide, har de udledt nogle formler, der gjorde det muligt at beregne arealet af bl.a. en firkant og en trekant…

Trekants areal: har de fundet ved at sige ½ × højde × grundflade, ½×(h×b).

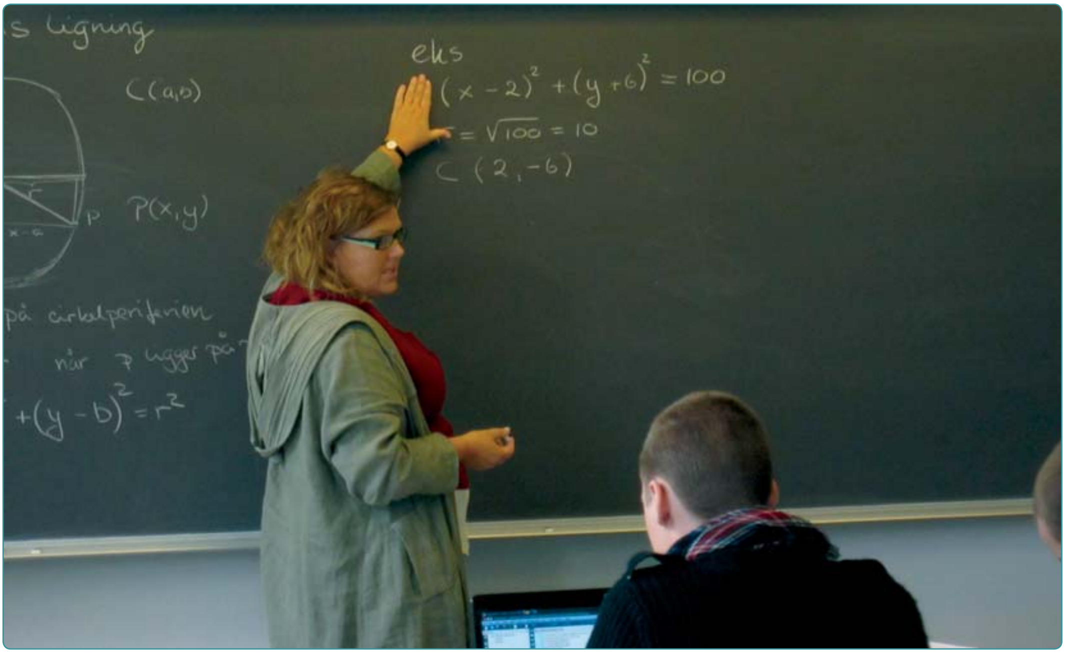
Firkants areal: har de fundet ved at sige længde × bredde«

Her lægger eleven oplagt sin egen nutidige forståelse af begreber som formel, rumfang, areal, trekant og firkant ned over egypternes praksis. Eksempelvis er det rigtigt, at man kender til eksempler på, at egypterne beregner areal af en trekantet mark. Men deraf kan jo ikke sluttes, at egypterne dermed har et abstrakt trekants-begreb, endsige areal-begreb, som kan overføres til sidefladerne på en abstrakt pyramide. Det kan naturligvis ikke udelukkes, men bør behandles med kritisk overvejelse.

De matematikhistoriske opgaver er fyldt med sådanne eksempler. Min vurdering er, at historiemetodiske dyder som *kritisk* læsning af *historiske* kilder forsvinder fra elevens matematiske arbejde. Fokus ligger alene på det rent matematiske: Eleven vil/skal vise, at vedkommende kan sige noget begavet om formlen for pyramiders rumfang, mens oldegypten dybest set er underordnet.

Overordnet set synes indholdet i matematikhistoriske projekter at falde i fire elementer:

- Historisk redegørelse, f.eks. for det græske samfund eller Frankrig i 1600-tallet.
- Historisk matematik, f.eks. babylonsk brøkregning eller Newtons fluxions-begreb.



- ◦ Kilder, f.eks. uddrag af egyptisk papyrusrulle eller et brev fra Pascal.
- ◦ Sammenligning/perspektivering, f.eks. mellem græsk og nutidig matematik.

Set fra et tværfagligt synspunkt forekommer det dominerende problem at være at få disse elementer til at spille sammen på en tværfaglig måde. Typisk fremstår de historiske redegørelser isoleret fra den matematikhistorie, der er i fokus, den historiske matematik fremstilles alene med nutidige begreber, og eleven mangler typisk redskaber til at arbejde med kilder. Ofte bliver der tale om to særskilte arbejder – matematik og historie hver for sig – som måske, måske ikke, bindes sammen i afslutningen. Det sidste afgør typisk, om samspillet er et parallelforløb eller formelt flerfagligt.

I samspil af typen *matematik og udviklingen af videnskab, teknologi og samfund* er ovennævnte problem mindre, fordi fokus her ligger på matematikkens indflydelse på historien, frem for omvendt. Med et sådan fokus er der mere brug for at koncentrere sig om, hvilke typer af situationer det på et givet historisk tidspunkt var muligt at håndtere matematisk, end matematikkens egen historie.

Der synes dog også her at opstå problemer, fordi opgavens matematiske elementer ofte ikke kan kobles direkte til den historiske udvikling. F.eks. et projekt om brydning af kodemaskinen Enigma, hvor der samtidig spørges til det tyske angreb på Sovjetunionen i 1941. De to ting har vist ikke rigtigt nogen forbindelse. Det medfører enten, at fagene reelt ikke spiller sammen, eller at nogle elever må ud i gevaldige krumspring for til sidst at koble deres historiske og matematiske arbejde.

I de to samspilstyper *historie om matematisk model* og *modellering i historie* viser det sig nemmere at få de to fag til at spille sammen. Det skyldes formentlig tilstedeværelsen af mere konkrete modelleringsmuligheder, der kan trække på forholdsvist avanceret matematisk teori, f.eks. sfærisk trigonometri i projekter om astronomisk navigation.

De to samspilstyper er dog sjældne, og ofte skulle der have været tænkt mere over, hvordan den indgående modellering hænger sammen med det historiske. De gode ideer mangler.

Eksempler på begrebsbrug stopper her – for flere eksempler henvises til Jensen (2010). Det afgørende for mig er at vise de muligheder, som samspilsspecifikke kategorier opstiller. Det er først og fremmest, at man i tilrettelæggelsen kan fokusere de indgående elementer under hensyn til samspillet. F.eks. om der skal lægges vægt på matematikkens indre historie eller på matematiks betydning for historien.

For det andet er det muligheden for at foretage dybere analyser af de enkelte kategorier og derudfra skabe redskaber til at udvikle samspil af den pågældende type. F.eks. at man identificerer typiske elementer i en samspilstype, som man derfor kan udvikle særligt gode måder at inddrage på. Eksempelvis brug af kilder, historisk matematik, historisk redegørelse, mv. i matematikhistorie.

Udfordringen er herefter de mere konkrete udviklingsopgaver, som bedst foretages ude i praksis. Det kan være at finde de gode kilder eller opgaver, som faktisk eksemplificerer den forskel, udviklingen af differentialregningen gjorde for Newton, osv. En anden udfordring er at opstille samspilsspecifikke begreber for andre fagkombinationer. Disse vil afhænge af det konkrete samspil. For konstellationen matematik-biologi kunne det f.eks. dreje sig om overskrifter som "populationsmodeller", "fysiologiske modeller", "økologiske modeller".

Hvor meget og hvordan?

Det kan diskuteres, om det er ønskeligt at øge graden af tværfaglighed. De nyeste justeringer af gymnasiereformen peger i den modsatte retning. Og i Andresen (2010) argumenteres der for, at fokus især skal ligge på det, jeg her har kaldt komparativ faglighed. Dette skal ske for "at belyse, kontrastere og skærpe opmærksomheden på matematisk faglighed". Dog skal matematisk faglighed fornyes, så der "lægges vægt på andet og mere end tekniske, praktiske, algoritme-prægede og bevistekniske fagelementer".

Det sidste er jeg enig i. Det første er jeg ikke kategorisk afvisende overfor, men nok en smule tøvende. Den engelske matematikdidaktiker Jo Boaler har i en række undersøgelser peget på, at det bl.a. er matematikkens uvedkommenhed, der får selv elever, som er dygtige til matematik i skolen, til senere at vende ryggen til faget (Boaler 2000). Spørgsmålet er, om flere elever vil kunne identificere sig med faget ved at tydeliggøre dets afgrænsning over for andre fag.

Hvis jeg skal komme med et bud på en diagnose for, hvorfor det er så svært med god tværfaglighed, så skal den hentes i måden hvor på man konstruerer de eksempler, der arbejdes med. Vi skaber i dag undervisningsfag ved at nedskalere eksempler på fagets praksis. Derpå beder vi to på denne måde konstruerede undervisningsfag om at passe ind i hinanden. Det må være en svær opgave.

Min anbefaling er derfor, at man graver de mange eksempler på tværfaglighed fra virkelighedens praksisser frem og laver en selvstændig transposition af disse til gymnasievirkeligheden. F.eks. udkommer der mange videnskabelige tidsskrifter om sociologisk matematik, populationsmatematik, matematik og kunst, matematikhistorie, mv. I hvert af disse findes der artikler skrevet af matematikere, der arbejder tværfagligt. Nogle af disse artikler må på den ene eller anden måde kunne nedskaleres til virkelighedsnære gymnasierettede eksempler på, hvordan matematik kan arbejde tværfagligt.

Referencer

- Andresen, Mette: 2010, "På tværs – men hvor meget?", MONA, 2010(2), s. 76-79.
- Boaler, Jo, m.fl.: 2000, "The Construction of Identity in Secondary Mathematics Education", i Proceedings of the Second International Mathematics Education and Society Conference.
- Dolin, Jens: 2006, "Fag, hovedområder og fagligt samspil" (2006) i Erik Damberg, Jens Dolin og Gitte Holten Ingerslevs "Gymnasiepædagogik – en grundbog", Hans Reitzels Forlag.
- Fried, Michael N., 2001: "Can Mathematics Education and History of Mathematics Coexist?", Science & Education, vol. 10, s. 391-408.
- Hansen, Britta: 2009, "Didaktik på tværs af matematik og historie – en prakseologisk undersøgelse af de gymnasiale studieretningsprojekter", Specialerapport, IND's studenterserie nr. 10.
- Jensen, Kasper Bjering: 2010, "Tværfaglige samspil mellem matematik og historie i gymnasiets studieretningsprojekt (SRP)", MONA, 2010(1), side 32-53.
- Winsløw, Carl: 2006, "Didaktisk elementer", biofolia. ◊