Fra krum kurve og flade til skarpkantet kurve og flade – ulige eksponent

Jørgen Angelo, Ingeniørhøjskolen København

Her behandles kurverne $x^{2n+1}+y^{2n+1}=1$ og fladerne $x^{2n+1}+y^{2n+1}+z^{2n+1}=1$ for $n \in \mathbb{N}$ for $n \to \infty$. I LMFK-bladet november 2009 så vi på kurven og fladen med eksponenten 3. Kurven og fladen var åben og symmetrisk i de 3 koordinatretninger.

Denne gang ser vi på den ulige eksponent gående mod uendelig. Dette sikrer vi os ved at bruge eksponenten $2n+1$ og lade n starte ved 1 og derefter gennemløbe de naturlige tal. Alle kurver og flader med ulige eksponent har grundlæggende samme form som for eksponenten 3, men bliver mere skarpkantede.

1) Kurven: $x^{2n+1}+y^{2n+1}=1$

Hvis man tegner grafen for funktionen

$$y=(1-x^{2n+1})^{\frac{1}{2n+1}}$$

kan man se, at man for stigende værdier af n får en mere og mere kantet figur, som går uendelig tæt på den "grænsekurve", som er vist på figur 1, hvor også kurverne for eksponenterne 3, 5 og 7 er indtegnet. Det vil jeg bevise ud fra grænseværdibetragtninger.

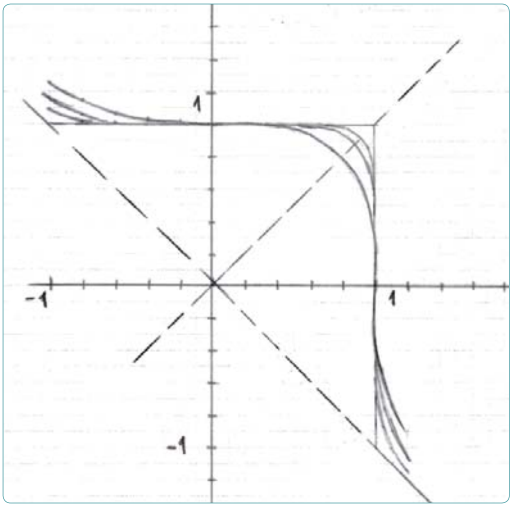
Bevis

Vi ser på ligningen $x^{2n+1}+y^{2n+1}=1$. Vi omskriver nu ligningen til $y^{2n+1}=1-x^{2n+1}$.

1A) Først lader vi $-1<x<1$.
Da $|x|<1$, vil $x^{2n+1} \to 0$ for $n \to \infty$. Altså har vi $y^{2n+1} \to 1$ for $n \to \infty$ eller $y \to 1$. Da dette sker uafhængig af x, når blot $-1<x<1$, når vi frem til, at grafen har det vandrette liniestykke $y=1$ som "grænsekurve" for $-1<x<1$.

1B) Vi bytter nu om på x og y i ovenstående betragtninger og får dermed det lodrette liniestykke $x=1$ for $-1<y<1$.

1C) Vi lader nu $x>1$.
Ved at dividere ligningen med x^{2n+1}, fås



Figur 1

$$\left(\frac{y}{x}\right)^{2n+1}=\frac{1}{x^{2n+1}}-1.$$

Da $x>1$, må $\frac{1}{x^{2n+1}} \to 0$ for $n \to \infty$. Det betyder, at

$$\left(\frac{y}{x}\right)^{2n+1} \to -1,\ \frac{y}{x} \to -1 \text{ eller } y \to -x \text{ for } n \to \infty.$$

Dette sker altså uafhængig af x, når blot eksponenten er tilstrækkelig høj. Vi har altså linien $y=-x$ som "grænsekurve" for $x>1$ og $n \to \infty$.

1D) Vi bytter nu om på x og y i ovenstående betragtninger og får $x=-y$ eller $y=-x$ som grænsekurve for $y>1$ og $n \to \infty$.

Det ses endvidere ud fra en overordnet betragtning, at vi må få 3 "skarpe hjørner" der, hvor grænsekurverne støder sammen. Her må krumningen gå mod uendelig. Samtidig må krumningen gå mod 0 i alle andre punkter på de 3 liniestykker. Man kan sige, at al kurvekrumningen flyttes over og koncentreres i de 3 punkter for $n \to \infty$.

Q.E.D.

Ovenstående kan efterprøves med kurveeksempler på den grafiske lommeregner.

2) Niveaukurver for fladen: $x^{2n+1}+y^{2n+1}+z^{2n+1}=1$

Vi ser på niveaukurver for konstante z-værdier.

2A) Først ser vi på intervallet $-1<z<1$.
Her vil $|z|<1$ og $z^{2n+1}\to 0$ for $n\to\infty$. Vi får dermed som grænseværdi ligningen $x^{2n+1}+y^{2n+1}=1$. Kurven for denne ligning har vi studeret under afsnit 1). Vi får altså i intervallet $-1<z<1$ en "stak" af ens vandrette kurver oven over hinanden, der danner nogle lodrette plane vægge, der støder op mod hinanden i 3 lodrette linier.

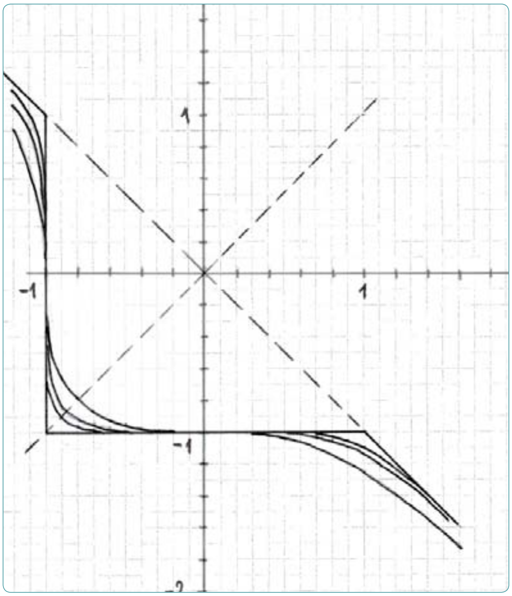
2B) Vi ser nu på $z = 1$.
Her får vi ligningen $x^{2n+1}+y^{2n+1}+1=1$ eller $x^{2n+1}+y^{2n+1}=0$. Denne ligning kan omformes til

$$\left(\frac{y}{x}\right)^{2n+1}=-1,$$

som har løsningen $y=-x$ uanset størrelsen af n. Vi har dermed en vandret linie, som i øvrigt også blev fundet i artiklen med eksponenten 3.

2C) Vi ser nu på $z=-1$.
Her får vi ligningen $x^{2n+1}+y^{2n+1}-1=1$ eller $x^{2n+1}+y^{2n+1}=2$.

Hvis vi kun interesserer os for grænsekurven for $n\to\infty$, kan vi uden bevis sandsynliggøre, at resultatet bliver det samme som under 2A), da $2^{\frac{1}{2n+1}}\to 1$ for $n\to\infty$. Man kan også prøve at tegne kurven på lommeregneren for en høj eksponent.



Figur 2

2D) Vi ser nu på $z<-1 \vee z>1$ eller $|z|>1$.
Ved at dividere ligningen igennem med z^{2n+1} fås

$$\left(\frac{x}{z}\right)^{2n+1}+\left(\frac{x}{z}\right)^{2n+1}+1=\frac{1}{z^{2n+1}}$$

Da $|z|>1$, går højre side af lighedstegnet mod nul for $n\to\infty$. Hvis vi ydermere indfører 2 hjælpevariable $x'=\frac{x}{z}$ og $y'=\frac{y}{z}$, får vi for $n\to\infty$ ligningen $x'^{2n+1}+y'^{2n+1}+1=0$ eller $x'^{2n+1}+y'^{2n+1}=-1$.

Denne kurve, som er vist i figur 2 som grænsekurve og for eksponenterne 3, 5 og 7, vil vi analysere nedenfor.

2D-A) Vi lader $|x'|<1$.
Vi får nu ud fra lignende betragtninger som i 1A) at grænsekurven bliver $y'=-1$ for alle $|x'|<1$.

2D-B) Vi bytter om på x' og y' og får som i 1B) $x'=-1$ for alle $|y'|<1$.

2D-C) Vi lader nu $x'>1$.
Vi får som i 1C), at grænsekurven bliver $y'=-x'$. Vi gennemgår for god ordens skyld beregningerne, idet vi som eneste forskel fra før får et minus foran den brøk, der går mod 0: Ved at dividere ligningen igennem med x'^{2n+1} fås

$$\left(\frac{y'}{x'}\right)^{2n+1}=-\frac{1}{x'^{2n+1}}-1.$$

Da $x'>1$, må $\frac{1}{x^{2n+1}}\to 0$ for $n\to\infty$. Det betyder,

$$\left(\frac{y'}{x'}\right)^{2n+1}\to -1,\ \frac{y'}{x'}\to -1 \text{ eller } y'\to -x' \text{ for } n\to\infty.$$

Dette sker altså uafhængig af x', når blot eksponenten er tilstrækkelig høj. Vi har altså linien $y' = -x'$ som "grænsekurve", for $x'>1$ og $n\to\infty$.

2D-D) Vi bytter nu om på x' og y' og får som i 1D) $x' = -y'$ eller $y' = -x'$ som grænsekurve for $y'>1$ og $n\to\infty$.

Samlet set får vi under 2D) en kurve for x' og y', som ligner kurve 1) spejlet omkring linien $y'=-x'$. Bemærk i øvrigt, at kurveknækket ligger i 3. kvadrant for $z>0$, henholdsvis 1. kvadrant for $z<0$. Niveaukurverne for fladen $x^{2n+1}+y^{2n+1}+z^{2n+1}=1$ ligner alle varianter af kurve 1).

Matematik

3) Fladens sammenhæng i de 3 akseretninger

Jeg har tidligere nævnt, at for alle ulige eksponenter er fladerne i familie med fladen for eksponenten 3. Nu vil jeg koncentrere mig om grænsefladen, når $n \to \infty$, idet den stadig vil minde om eksponenten 3. Jeg konstaterer følgende.

3A) Fladen er symmetrisk i de 3 koordinatretninger.

3B) Fladen åben.

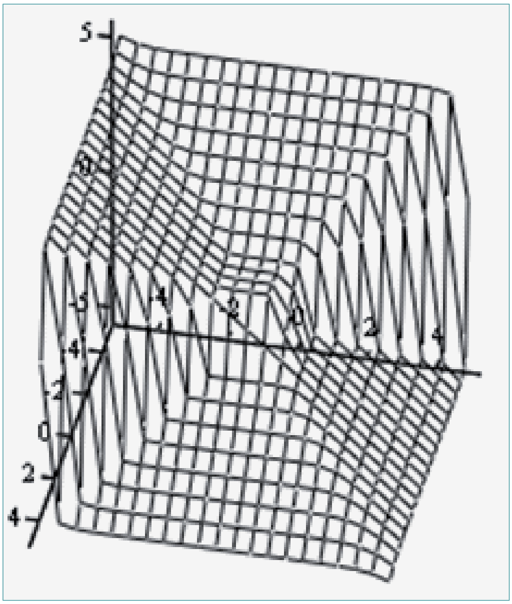
3C) For $-1 < z < 1$ dannes to lodrette vægge: Den ene har ligningen $y = 1$ for $-1 < x < 1$, og den anden har ligningen $x = 1$ for $-1 < y < 1$. Ved bogstavombytning fås også en vandret væg $z = 1$ for $-1 < x < 1$ og $-1 < y < 1$. Alt i alt danner væggene et udsnit svarende til 3 sider af en terning.

3D) For $z < -1$ eller $z > 1$ får vi 3 planudsnit: Vi husker, at vi indførte 2 hjælpevariable $x' = \frac{x}{z}$ og $y' = \frac{y}{z}$. Dette gav linier med ligningerne

1) $x' = -1 \Leftrightarrow \frac{x}{z} = -1 \Leftrightarrow x = -z \Leftrightarrow x + z = 0$
2) $y' = -1 \Leftrightarrow \frac{y}{z} = -1 \Leftrightarrow y = -z \Leftrightarrow y + z = 0$
3) $y' = -x' \Leftrightarrow \frac{y}{z} = -\frac{x}{z} \Leftrightarrow y = -x \Leftrightarrow x + y = 0$

Det ses at, hvis vi laver bogstavombytning for at udnytte symmetrien i de 3 koordinatretninger, ja, så får vi de samme ligninger igen. Fladen er derfor rundt om terningudsnittet sat sammen af ovenstående 3 planer. Man kan beregne at de 3 planer hver skærer hinanden i 3 skæringslinier, som alle går gennem origo, og har retningsvektorer

$$\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ og } \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$



Figur 3

Figur 3) viser et 3D-plot fra MathCad for eksponenten 11. Bemærk terningudsnittet omgivet af udsnittene af de 3 nævnte planer. ◊

Kurve og flade – eksponenten 3

Jørgen Angelo, Ingeniørhøjskolen København

I LMFK-bladet nr. 4, 2009 så vi på kurver og flader med lige eksponenter. Disse kurver og flader var lukkede. Denne gang ser vi på eksponenten 3. Både kurven og fladen er åbne.

Kurven $x^3 + y^3 = 1$

Vi har funktionen $f(x) = (1 - x^3)^{\frac{1}{3}}$

som hvis n var lige, og vil minde meget om superellipsen.

B) Vi lader nu $x > 1$

I dette interval vil y være negativ, og for stigende værdi af x vil x^3 og y^3 "holde hinanden i skak" ved at $y \approx -x$. Man får altså i dette interval en skrå asymptote $y = -x$.

Bevis

De to tidligere artikler i denne serie kan, som så mange andre artikler fra LMFK-bladene, findes i pdf-form på www.lmfk.dk/artikler.