Herons formel – et andet bevis

JENS CARSTENSEN, Tårnby Gymnasium

I *LMFK-bladet*, maj 2010, kunne vi læse et bevis for Herons formel. Vi skal her anføre endnu et bevis, som er lidt kortere og sikkert ikke så kendt.

Lad h være højden fra B og H dens fodpunkt. Vi sætter $AH = x$ og $CH = b - x$. Så får vi i de retvinklede trekanter ABH og CBH:

$$h^2 + x^2 = c^2 \text{ og } h^2 + (b - x)^2 = a^2.$$

Subtraktion giver

$$c^2 - a^2 = x^2 - (b^2 + x^2 - 2bx) \Leftrightarrow$$
$$bx = \tfrac{1}{2}(b^2 + c^2 - a^2)$$

Nu gælder i almindelighed for to tal p og q, at

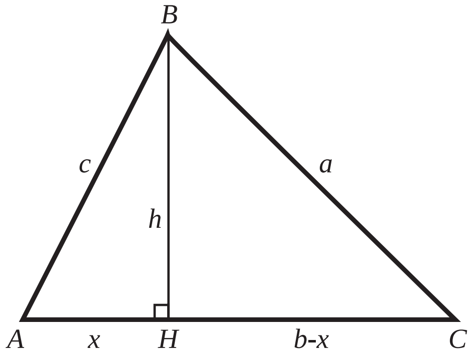
$$4pq = (p + q)^2 - (p - q)^2. \qquad (1)$$

Sæt

$$p = s(s - a) \text{ og } q = (s - b)(s - c).$$

Så er

$$p + q = s^2 - as + s^2 - sc - sb + bc =$$
$$2s^2 - s(a + b + c) + bc = bc$$



og

$$p - q = s^2 - as - s^2 + sb + sc - bc =$$
$$s(b + c - a) - bc = \tfrac{1}{2}(b^2 + c^2 - a^2) = bx.$$

Nu får vi efter formel (1)

$$4s(s - a) \cdot (s - b)(s - c) =$$
$$(bc)^2 - (bx)^2 = b^2(c^2 - x^2) = b^2h^2 = (2T)^2$$

hvoraf

$$T^2 = s(s - a)(s - b)(s - c),$$

hvilket er Herons formel. ◊

Om nogle grænseværdier

JENS CARSTENSEN, Tårnby Gymnasium og
ALIJA MUMINAGIĆ, Nykøbing F

Vi skal her se på et par grænseværdier for specielle funktioner. Vi bestemmer først følgende grænseværdier:

$$\lim_{x\to 1} \frac{\ln(x)}{x-1} \text{ og } \lim_{x\to 0} \frac{\sin(x)}{x}.$$

Da den naturlige logaritmefunktion er differentiabel i 1, er

$$\frac{\ln(x)}{x-1} = \frac{\ln(x)-\ln(1)}{x-1} \to \ln'(1) = 1,$$

og da sin er differentiabel i 0, har vi

$$\frac{\sin(x)}{x} = \frac{\sin(x) - \sin(0)}{x-0} \to \sin'(0) = \cos(0) = 1.$$

I det sidste tilfælde kan man sige, at grænseværdien af $\sin(x)/x$ for det meste forudsættes kendt *inden* differentiationen af sinusfunktionen vises.

Hvis en funktion f er 2 gange differentiabel i x, er jo

$$f''(x) = (f'(x))' = \lim_{h\to 0} \frac{f'(x+h)-f'(x)}{h}.$$

Vi skal vise, at vi også har den mere ukendte relation

$$f''(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) + f(x-h) - 2f(x)}{h^2}.$$

Vi indfører funktionerne g og h ved

$$g(h) = f(x+h) + f(x-h) - 2f(x) \text{ og } z(h) = h^2.$$

Efter L'Hospitals regel gælder

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) + f(x-h) - 2f(x)}{h^2} =$$
$$\lim_{h\to 0} \frac{g(h)}{z(h)} = \lim_{h\to 0} \frac{g'(h)}{z'(h)} =$$
$$\lim_{h\to 0} \frac{f'(x+h) - f'(x-h)}{2h} =$$
$$\frac{1}{2} \lim_{h\to 0} \left(\frac{f'(x+h) - f'(x)}{h} + \frac{f'(x) - f'(x-h)}{h} \right) =$$
$$\frac{1}{2} \left(\lim_{h\to 0} \frac{f'(x+h) - f'(x)}{h} + \lim_{h\to 0} \frac{f'(x) - f'(x-h)}{h} \right) =$$
$$\frac{1}{2}(f''(x) + f''(x)) = f''(x).$$

◊