Herons formel

– beviser med brug af semiomkredsen

Anton Juhl, Høje Tåstrup Gymnasium, 3.z, aspergerklassen

Mange gymnasieelever bruger Herons formel, da den står i formelsamlingerne. Det er dog ikke ofte, at formlen bliver bevist, men det vil jeg gøre i denne artikel ved hjælp af alment kendt trigonometri. Desuden vil jeg bevise, at semiomkredsen har direkte betydning for en trekants areal. Det vil jeg gøre i en mere billedlig stil ved hjælp af den indskrevne cirkel.

En trekant *ABC* med siderne *a, b, c* og den halve omkreds

$$s = \frac{a+b+c}{2}$$

har ifølge Herons formel arealet

$$\Delta ABC = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$$

$$= \sqrt{\frac{a+b+c}{2}\cdot\frac{a+b+c-2a}{2}\cdot\frac{a+b+c-2b}{2}\cdot\frac{a+b+c-2c}{2}}$$

$$= \sqrt{\frac{(a+b+c)\,(b+c-a)\,(a+c-b)\,(a+b-c)}{16}}$$

$$= \tfrac{1}{4}\sqrt{-a^4-b^4-c^4+2a^2b^2+2a^2c^2+2b^2c^2}$$

Herons formel kan udledes ved hjælp af cosinus relationen, ‘idiot’-reglen og arealet af en trekant udtrykt ved sinus af en vinkel:

$$\cos(A) = \frac{b^2+c^2-a^2}{2bc} \text{ og } \sin^2(A) = 1-\cos^2(A)$$

$$\sin^2(A) = \frac{-a^4-b^4-c^4+2a^2b^2+2a^2c^2+4b^2c^2-2b^2c^2}{4b^2c^2}$$

$$\sin(A) = \frac{\sqrt{-a^4-b^4-c^4+2a^2b^2+2a^2c^2+2b^2c^2}}{2bc}$$

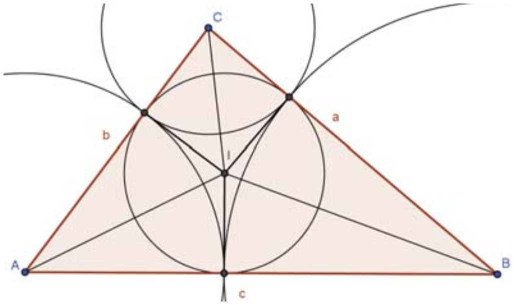
$$\Delta ABC = \frac{1}{2}\cdot\sin(A)\cdot bc$$

$$= \frac{1}{2}\cdot\frac{\sqrt{-a^4-b^4-c^4+2a^2b^2+2a^2c^2+2b^2c^2}}{2bc}\cdot bc$$

$$= \frac{1}{4}\cdot\sqrt{-a^4-b^4-c^4+2a^2b^2+2a^2c^2+2b^2c^2}$$

$$= \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$$

Q.E.D.



En anden formel, der kan være interessant at kigge på i forbindelse med Herons formel, er

$$\Delta ABC = r_i \cdot s,$$

hvor r_i er radius for den indskrevne cirkel i trekant *ABC*.

I denne trekant er der fire cirkler, en indskreven cirkel samt tre cirkler, der tangerer hinanden og har centrum i vinklerne. Som man kan se, gælder der, at den indskrevne cirkel tangerer siderne, der hvor vinkelcirklerne tangerer hinanden. Det betyder, at radius står vinkelret på linjen.

Man har derfor tre par af retvinklede trekanter, disse trekanter kan man slå sammen og danne tre trekanter, hvor højden er givet som radius af den respektive vinkelcirkel multipliceret med to gange radius af den indskrevne cirkel. Siderne i trekanten er givet som:

$$a = b_r + c_r,\ b = a_r + c_r,\ c = a_r + b_r$$

$$s = \frac{a+b+c}{2} = a_r + b_r + c_r$$

$$a_r = s-a,\ b_r = s-b,\ c_r = s-c$$

Man tager så arealerne af de tre trekanter og lægger sammen

$$\Delta ABC = \tfrac{1}{2}\cdot 2\cdot r_i\cdot a_r + \tfrac{1}{2}\cdot 2\cdot r_i\cdot b_r + \tfrac{1}{2}\cdot 2\cdot r_i\cdot c_r$$

$$= r_i\cdot(a_r + b_r + c_r) = r_i \cdot \text{s}.$$

Q.E.D.

Som et sideresultat kan radius for den indskrevne cirkel udregnes ud fra

$$r_i \cdot s = \sqrt{(a_r + b_r + c_r)(a_r \cdot b_r \cdot c_r)}$$

$$r_i = \frac{\sqrt{(a_r + b_r + c_r)(a_r \cdot b_r \cdot c_r)}}{s}$$

$$= \sqrt{\frac{a_r \cdot b_r \cdot c_r}{a_r + b_r + c_r}}$$

◊