

# Exoplaneter

NIELS ERIK WEGGE,  
BIRKERØD GYMNASIUM, HF OG IB

Artiklen behandler bestemmelse af grundlæggende banedata for exoplaneter ved hjælp af radialhastighedsmetoden, samt en illustrerende, eksperimentel lydsimulation. Et velegnet emne til SRP i fysik og matematik.

Der er adskillige metoder i brug, når astronomer finder og beskriver exoplaneter. Den helt klassiske er radialhastighedsmetoden, som her gennemgås dels med 47 UMa<sup>1</sup>) som eksempel, dels i en lydanalogi, der i modsætning til normale kosmologiske “eksperimenter” kan udføres i laboratoriet med variabelkontrol og det hele. Emnet er velegnet til behandling i et SRP med matematik og fysik.

## 1. Radialhastighedsmetoden

Exoplaneter røber deres tilstedeværelse bl.a. ved den påvirkning, de har på den stjerne, som de kredser om. I den simpleste situation – og det er

kun den vi vil diskutere – er der tale om et rent tolegeme problem, hvor både stjerne og planet kredser i cirkulære baner om deres fælles massemidtpunkt, se figur 1.

Idet  $T$  er den fælles omløbstid for planet og stjerne, altså et “år”,  $M$  og  $m$  er massen af hhv. stjerne og planet, og  $R$  og  $r$  de tilsvarende afstande fra massemidtpunktet, er situationen i fig. 1 beskrevet ved Keplers 3. lov og massemidtpunktsætningen:

$$\frac{(R+r)^3}{T^2} = G \cdot \frac{M+m}{4\pi^2} \quad (1)$$

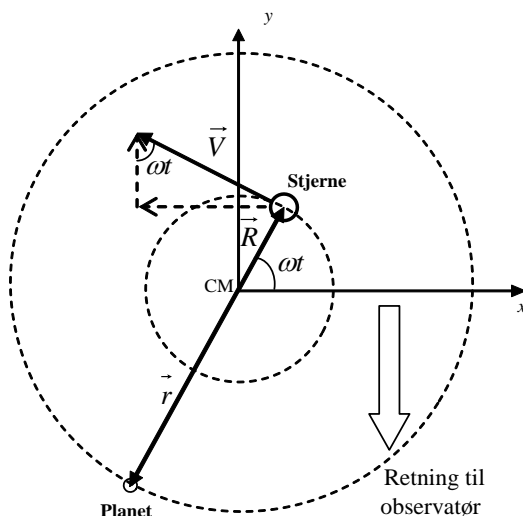
$$RM = rm \quad (2)$$

Det er en fin lille øvelse for eleverne at udlede (1) ud fra de to jævne cirkelbevægelser og Newtons gravitationslov.

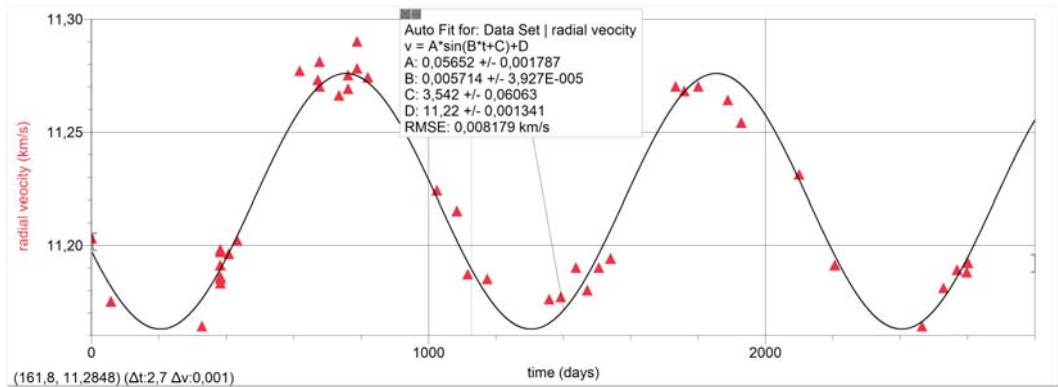
Ideen i radialhastighedsmetoden er som bekendt, at en fjern observatør ser den kredsende stjernes absorptionsspektrum blive dopplerforskudt periodisk frem og tilbage – og herudfra umiddelbart kan beregne såvel omløbstiden  $T$  som stjernens banefart  $V$  og baneradius  $R$ . Med kendskab til stjernens masse  $M$  viser det sig, som vi skal se, at også planetens baneradius  $r$ , og dermed dens afstand  $r+R$  fra stjernen, samt dens masse  $m$  kan beregnes<sup>2)</sup>.

Med yderligere viden om stjernens udstrålingseffekt kan man herefter overveje sager som beboelig zone og muligheden for forekomst af flydende vand samt eksistensen af liv, hvis man har lyst. Diskussionen om temperatur og klima på planeten kan udvides ad libitum med antagelser om planetens egenrotationshastighed samt tilstedeværelsen af en atmosfære med drivhuseffekt.

En simpel udregning, som jeg overlader til læseren eller læserens elever, giver fornemmelse for den krævede målenøjagtighed: Jupiters træk i Solen får denne til at udføre en cirkelbevægelse med periode  $T = 11,9$  år og radius  $R = 742.000$  km, og dermed fart  $V = 12,4$  m/s. Bemærk, at systemets massemidtpunkt ligger lige uden for Solens overflade. Med den lave fart kan en spektrallinje med bølgelængden  $\lambda_0 = 600$  nm forventes at variere mellem 599,99998 nm og 600,00002 nm. Man får respekt for de eksperimentelle astronomer som skal og kan måle så præcist.



Figur 1: Stjerne og exoplanet kredsende i jævn cirkelbevægelse om fælles massemidtpunkt CM. Stjernens position i forhold til CM er  $\vec{R}$ , og den bevæger sig med hastigheden  $\vec{V}$ .



Figur 2: Radialhastighedsdata for 47 UMa med harmonisk fit svarende til ligning (5).

## 2. Model for dopplerforskydningen af den modtagne frekvens

Vi betragter et stjerne-planetsystem der overordnet set bevæger sig med konstant fart  $v_0$  bort fra os, og indlægger et koordinatsystem med begyndelsespunkt i systemets massemidtpunkt og akserretninger i forhold til synsretningen til os som vist i figur 1.

Det antages uden nogen form for indskrænkning<sup>3)</sup>, at vi befinder os så langt fra stjernen, at synsretningen til denne er konstant. Idet vinkel-frekvensen for den jævne cirkelbevægelse er  $\omega = \frac{2\pi}{T}$  og den konstante fart er  $V = \frac{2\pi R}{T} = R\omega$ , kan stjernens position og hastighed relativt til massemidtpunktet beskrives ved

$$\vec{R}(t) = \begin{pmatrix} R \cdot \cos(\omega t) \\ R \cdot \sin(\omega t) \end{pmatrix} \quad (3)$$

$$\vec{V}(t) = \vec{R}'(t) = \begin{pmatrix} -R \cdot \omega \cdot \sin(\omega t) \\ R \cdot \omega \cdot \cos(\omega t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -V \cdot \sin(\omega t) \\ V \cdot \cos(\omega t) \end{pmatrix} \quad (4)$$

Stjernens radialfart  $V_r$  relativt til os er  $v_0$  plus  $y$ -komponenten af hastighedsvektoren  $\vec{V}$  i figur 1 og svinger altså harmonisk omkring værdien  $v_0$  med periode  $T$  og amplitude  $V$ :

$$V_r = V \cdot \cos(\omega t) + v_0. \quad (5)$$

I praksis observerer vi jo ikke radialfarten direkte, men holder øje med den dopplerforskydte frekvens  $f$  af en bestemt absorptionslinje i stjernens spektrum. Hvis den udsendte frekvens er  $f_0$ , og stjernen på et givent tidspunkt har radialfarten  $V_r$  i forhold til os, vil

$$\Delta f = f - f_0 = f_0 \cdot \frac{V_r}{c}. \quad (6)$$

Ved hjælp af (5) bliver (6) til

$$f = \Delta f + f_0 = \frac{f_0 \cdot V}{c} \cdot \cos(\omega t) + f_0 \cdot \left(\frac{v_0}{c} + 1\right). \quad (7)$$

Den observerede frekvens vil altså svinge harmonisk med periode  $T$  og amplitude

$$\frac{f_0 \cdot V}{c} = \frac{f_0 \cdot R \omega}{c}.$$

I specialtilfældet  $v_0 = 0$  foregår svingningen omkring  $f_0$ .

## 3. Eksempel på anvendelse af modellen: 47 UMa

På hjemmesiden [nsted.ipac.caltech.edu/](http://nsted.ipac.caltech.edu/), der et samarbejde mellem NASA og CalTech, findes tabeller med radialhastighedsdata for en lang række stjerner. I figur 2 ses et LoggerPro-fit af data for 47 UMa.

Ud fra fittet i fig. 2 kan vi umiddelbart se at 47 UMa overordnet bevæger sig med farten  $11,2 \frac{\text{km}}{\text{s}}$  i forhold til os, og derudover foretager en jævn cirkelbevægelse med fart  $V = 56,5 \frac{\text{m}}{\text{s}}$ , forudsat at vi betragter systemet direkte fra siden. At der er tale om en cirkelbevægelse ses af grafens symmetri. En elliptisk bevægelse ville for hver periode have en smal, høj top svarende til den hurtige bevægelse gennem periastron, jf. Keplers anden lov, og en bredere, lav top svarende til apastron. Af fig. 2 ses endvidere, at den exoplanet der formodes at forårsage 47 UMa's cirkelbevægelse, har omløbstiden  $T = \frac{2\pi}{B} = 1100$  dage, og at radius i 47 UMa's cirkelbevægelse derfor er  $R = \frac{VT}{2\pi} = 855.000$  km. Idet massen af 47 UMa er kendt,  $M = 1,08$  solmasser, er der kun to ubekendte tilbage i (1) og (2), nemlig planetens ba-

neradius  $r$  og masse  $m$ , og det burde derfor være ligetil at løse dem. Jeg har prøvet at solve på TI89 – uden held! I stedet kan man benytte sig af følgende trick: Indføres forholdet mellem stjernens og planetens masse som ny variabel  $x$ , bliver (2) til

$$x = \frac{M}{m} = \frac{r}{R}, \quad (8)$$

og så kan (1) omskrives til

$$\frac{R^3(1+x)^3}{T^2} = \frac{G}{4\pi^2} M(1 + \frac{1}{x}). \quad (9)$$

Ganges (9) igennem med  $x$  og reduceres, fås

$$x(1+x)^2 = \frac{G T^2}{4\pi^2} \cdot \frac{M}{R^3} = \xi. \quad (10)$$

Talværdien af den dimensionsløse konstant  $\xi$  i (10) kan umiddelbart udregnes, da alle de indgående parametre er kendte; i tilfældet 47 UMa er  $\xi = 5,28 \cdot 10^7$ . Ligningen  $x(1+x)^2 = \xi$  kan nu løses numerisk:  $x = 374,5$ , hvorved vi finder planetens masse  $m = \frac{M}{x} = 5,34 \cdot 10^{27} \text{ kg} = 2,8 M_{\text{Jupiter}}$ . Afstanden mellem planeten og stjernen er

$$R + r = (1+x) \cdot R = 2,1 \text{ AE}.$$

Det ville være dejligt at kunne kontrollere dette resultat med en uafhængig bestemmelse, men det er af gode grunde ikke ligetil.

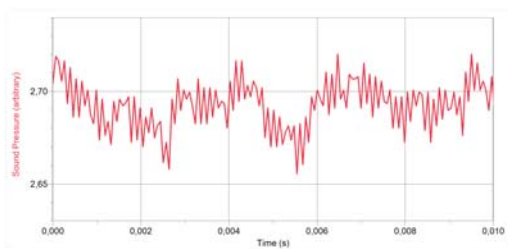
#### 4. Lydanalogi

I lydanalogien benyttede jeg en metronom som "stjerne". Ud over at slå takt kan min metronom nemlig frembringe en konstant og særdeles gennemtrængende tone på 440 Hz, altså kammertonen, som kan høres på lang afstand. Metronomen blev monteret for enden af en lang arm og sat i rotation af en motor med stabil, regulerbar fart, samme udstyr, som vi bruger til undersøgelse af jævn cirkelbevægelse. Man hører allerede ved relativt lave hastigheder, at grundfrekvensen  $f_0 = 440 \text{ Hz}$ , der repræsenterer en bestemt spektrallinje i lyset fra "stjernen", dopplerforskydes op og ned for hvert omløb. "Stjernens" baneradius og omløbstid kontrolmålte jeg direkte med et målebånd og et stopur. Herefter var opgaven, om man udelukkende ud fra en analyse af tonen kunne reproducere disse to parametre. Det kunne man!

Hele opstillingen blev monteret udendørs, fjernt fra mure og vægge, der frembringer generende ekkoer. Som analogi til teleskopet placerede jeg en mikrofon i passende stor afstand fra "stjernen", så retningen hertil var stort set konstant. Med mikrofonen blev lyden optaget i LoggerPro. Med en sampling på 15 kHz og ca. tre hele omløb blev det til tre sekunders lydfil af



Figur 3: Forsøgsopstilling med en cirkelkredsende metronom, der er fastspændt for enden af en målestok, som vist på det indsatte nærbillede i øverste venstre hjørne.



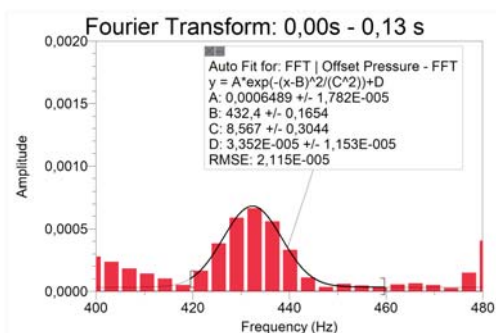
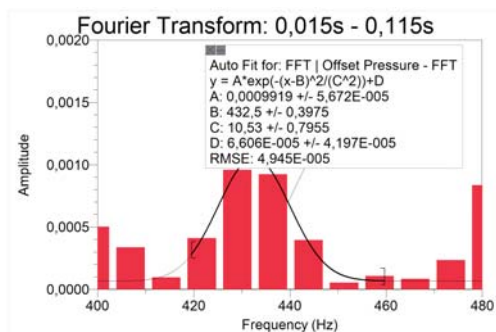
Figur 4: Kort udsnit af den tre sekunder lange lydoptagelse af den kredsende metronoms kammer-tone,  $f_0 = 440$  Hz.

ganske betydelig størrelse; et udsnit svarende til de første 10 ms ses i figur 4.

Efter de tre sekunder er forsøget slut, og resten er dataanalyse, som starter med at bestemme frekvensen ved fouriertransformation i LoggerPro af et passende antal 0,13 s lange bidder af lydfilen. Valget af  $\Delta t = 0,13$  s er naturligvis et kompromis mellem en passende lille værdi, så "stjernen" ikke når at flytte sig for meget, og en passende stor værdi, så LoggerPro har svingninger nok til en præcis bestemmelse af frekvensen.

Alle de fouriertransformerede bidder fittes tålmodigt med en gausskurve i intervallet fra 420 Hz til 460 Hz – den ønskede frekvens er gaussklokkens centralværdi, se fig. 5.

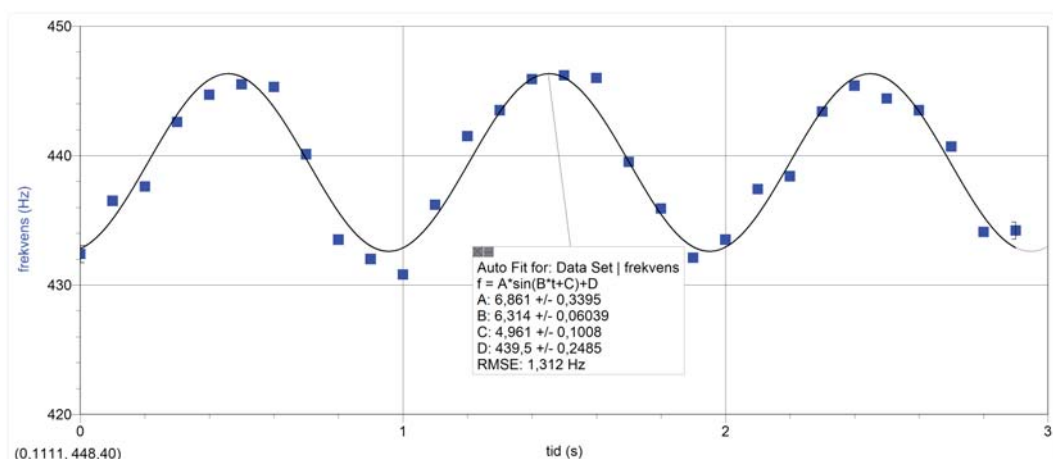
Nu har vi datamateriale til den endelige graf af frekvens som funktion af tid. Denne fittes i overensstemmelse med modelformlen (7) med den



Figur 5: Bestemmelse af den "øjeblikkelige" frekvens ved gaussfit af fouriertransformeret lyd.

Grafen foroven har  $\Delta t = 0,1$  s, grafen for neden  $\Delta t = 0,13$  s. Bemærk, at centralfrekvensen – fittets B-tal – er meget robust, trods den forskellige opløsning.

prædefinerede LoggerPro-funktion  $A \cdot \sin(Bx + C) + D$ , se figur 6. Bemærk, hvor smukt fittet læg-



Figur 6: Varierende lydfrekvens med harmonisk fit. Frekvensen er bestemt som gennemsnit i 0,13 s lange perioder for den roterende "stjerne".

ger sig omkring 440 Hz. Bemærk også, at der er en ganske stor usikkerhed i de enkelte frekvensmålinger. Faktisk må man smide nogle målinger ud, fordi gaussfittet af den ene eller anden grund ikke er tydeligt. En kraftigere lydkilde ville være at foretrække!

Vi er nu næsten i samme situation som i 47 UMA-eksemplet figur 2 – men også kun næsten. I praksis kan vi jo slet ikke observere den øjeblikkelige frekvens; vi er nødt til at tælle svingninger i et stykke tid  $\Delta t$  – i løbet af hvilket radialhastigheden og dermed den observerede frekvens ændrer sig. Frekvenserne i figur 5 og figur 6 er derfor gennemsnitsfrekvenser. Vi arbejder videre med (7) i specialtilfældet  $v_0 = 0$  og udregner middelfrekvensen  $\bar{f}$  for tidsrummet  $[t; t + \Delta t]$ :

$$\bar{f} = \frac{1}{\Delta t} \int_t^{t+\Delta t} f(t) dt = \frac{f_0 V}{c \omega \Delta t} [\sin(\omega t)]_t^{t+\Delta t} + f_0$$

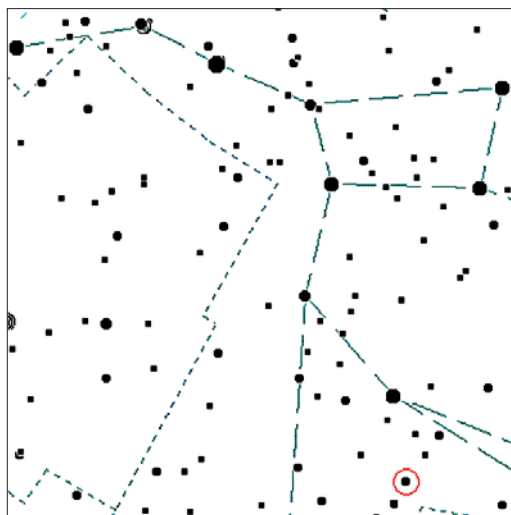
$$= \frac{f_0 R}{c \Delta t} \cdot (\sin(\omega(t + \Delta t)) - \sin(\omega t)) + f_0. \quad (11)$$

Med brug af passende additionsformler for sinus fås – efter lidt arbejde –

$$\sin(\omega t + \omega \Delta t) - \sin(\omega t) =$$

$$2 \sin\left(\frac{\omega \Delta t}{2}\right) \cdot \cos\left(\omega t + \frac{\omega \Delta t}{2}\right), \quad (12)$$

som ved indsættelse i (11) fortæller os, at ikke bare den øjeblikkelige frekvens, men altså og-



så gennemsnitsfrekvensen, forventes at variere harmonisk med periode  $T$  – dog nu med den lidt mindre amplitude

$$A = 2 \sin\left(\frac{\omega \Delta t}{2}\right) \cdot \frac{f_0 R}{c \Delta t}. \quad (13)$$

Bemærk, at når  $\frac{\omega \Delta t}{2}$  er lille, så vil

$$\sin\left(\frac{\omega \Delta t}{2}\right) \approx \frac{\omega \Delta t}{2},$$

og så bliver udtrykket (13) for amplituden i frekvensvariationen

$$A \approx \frac{f_0 R \omega}{c}$$

ligesom i (7) ☺.

## 5. Konklusion

Kontrolmålingerne fra det anførte eksempel var  $R = 0,98$  m og  $T = 1,04$  s målt over ti omløb. Ved analyse af fittet i figur 6 fås  $f_0 = 440$  Hz som forventet, samt

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 1,00 \text{ s og } R = \frac{Ac \Delta t}{2f_0 \cdot \sin\left(\frac{\omega \Delta t}{2}\right)} = 0,86 \text{ m,}$$

idet vi naturligvis benytter  $c =$  lydens fart<sup>4)</sup>.

Vi konstaterer altså, at radialhastighedsmetoden i denne lydanalogi faktisk er i stand til at reproducere de kendte baneparametre  $R$  og  $T$  med god præcision. Den beregnede  $R$ -værdi burde have været større, men som det ses på figur 6, er amplituden i LoggerPro-fittet faktisk lidt for lille, og i det hele taget burde usikkerheder på fitteparametre selvfølgelig tages med i beregningerne.

Forsøget kan udbygges til en hel måleserie med variabelkontrol på  $R$  og  $T$ , men som det ses er databehandlingen ganske omfattende. ◇

## Noter

- 1) Ursae Majoris 47, en soltvilling 46 lysår fra os i konstellationen Store Bjørn – en exoplanet blev påvist i 1996.
- 2) Da vi ikke nødvendigvis betragter stjerne-planetsystemet set lige fra siden, er der naturligvis kun tale om minimalværdier for såvel  $R$  som  $r$  og  $m$ .
- 3) I lydsimulationen er antagelsen mere diskutabel.
- 4) Men hvilken? Jeg glemte at måle temperaturen.

På stjernekortet til venstre er placeringen af Ursae Majoris 47 markeret med en rød ring.