Parabeltangent

Jens Carstensen, Tårnby Gymnasium

En parabel er graf for funktionen $f(x) = kx^2$, og vi kan for nemheds skyld antage, at $k > 0$, så parablens grene vender opad.

Vi er interesseret i at finde ligningen for en tangent til parablen i punktet (x_0, kx_0^2).

Vi viser, hvordan det kan gøres ved simpel algebra uden brug af differentialregning. Det er nok at bestemme hældningen.

Tangenten med hældning a har en ligning af typen

$$y - y_0 = a(x - x_0) \text{ eller } y = a(x - x_0) + kx_0^2.$$

Da parablen ligger over tangenten for alle x bortset fra x_0, gælder

$$kx^2 \geq a(x - x_0) + kx_0^2$$

for alle $x \neq x_0$, eller at

$$kx^2 - a(x - x_0) - kx_0^2 \geq 0 \Leftrightarrow$$

$$kx^2 - ax + ax_0 - kx_0^2 \geq 0$$

for alle $x \neq x_0$. Men dette betyder, at andengradspolynomiet på venstre side af ulighedstegnet har en diskriminant på 0:

$$a^2 - 4k(ax_0 - kx_0^2) = 0 \Leftrightarrow$$

$$a^2 - 4kax_0 - 4k^2x_0^2 = 0 \Leftrightarrow$$

$$(2kx_0 - a)^2 = 0 \Leftrightarrow$$

$$a = 2kx_0.$$

Dermed er tangentens hældning a bestemt.

Hvis $k < 0$, og parablen vender grenene nedad, gælder for alle $x \neq x_0$, at

$$kx^2 \leq a(x - x_0) + kx_0^2 \Leftrightarrow$$

$$kx^2 - ax + ax_0 + kx_0^2 \leq 0,$$

og igen slutter vi, at diskriminanten må være 0.◊