Andengradspolynomiets koefficienter

JENS CARSTENSEN, Tårnby Gymnasium

I fortsættelse af artiklen i LMFK-Bladet nr. 6, november 2009, skal vi her se på nogle egenskaber ved koefficienterne i andengradspolynomiet $f(x) = ax^2 + bx + c$. For at afsløre, hvordan hver af koefficienterne virker, er det naturligt at fastholde to af koefficienterne og variere på den sidste og se på, hvordan den parabel, der er graf for polynomiet, ændrer sig.

I. *c* varierer, *a* og *b* er faste

Det er kendt, at $c = f(0)$, og at ændringer i c svarer til lodret parallelforskydning af parablen.

II. *b* varierer, *a* og *c* er faste

Vi betegner koordinaterne til parablens toppunkt med (x_1,y_1), så

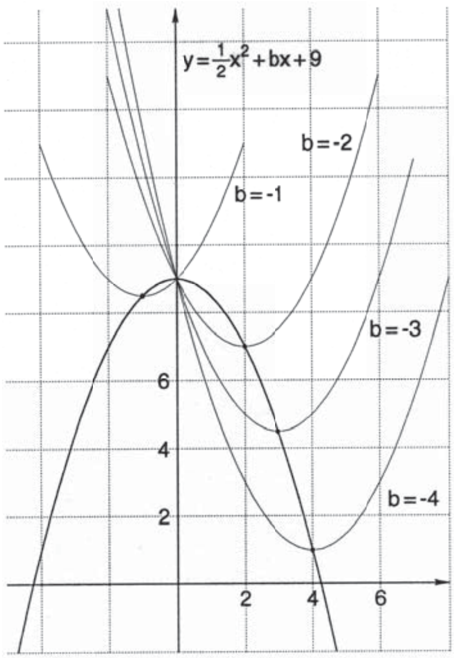
$$x_1 = \frac{-b}{2a},\quad y_1 = \frac{4ac - b^2}{4a} \tag{1}$$

Vi vil bestemme en ligning, der forbinder x_1 og y_1. Den første ligning giver $b = -2ax_1$ og indsættelse i den anden giver

$$y_1 = \frac{4ac - 4a^2x_1^2}{4a} = c - ax_1^2$$

Dette betyder, at når b varierer, vil parablens toppunkt bevæge sig på en parabel med ligningen $y = c - ax^2$, dvs. på en parabel, der er kongruent med den oprindelige, med grenene modsat rettede og gennem samme skæringspunkt på y-aksen som den oprindelige.

På figuren er tegnet parablen med ligningen $y = \frac{1}{2}x^2 - 4x + 9$ svarende til $b = -4$ og desuden parabler svarende til andre værdier af b. Bemærk toppunktets forskydning langs parablen med ligningen $y = 9 - \frac{1}{2}x^2$.



III. *a* varierer, *b* og *c* er faste

Vi går igen ud fra toppunktets koordinater (1) og får

$$x_1 = \frac{-b}{2a} \Leftrightarrow a = \frac{-b}{2x_1}$$

og dette indsættes i udtrykket for y_1:

$$y_1 = \frac{4\cdot\frac{-b}{2x_1}\cdot c - b^2}{4\cdot\frac{-b}{2x_1}} = \frac{-2bc - b^2x_1}{-2b} = \frac{b}{2}x_1 + c.$$

Når a varierer, vil parablernes toppunkter derfor bevæge sig langs linjen med ligningen

$$y = \frac{1}{2}bx + c,$$

som går gennem parablernes skæringspunkt med y-aksen.

Parablen på figuren er igen $y = \frac{1}{2}x^2 - 4x + 9$, og når a varierer, forskydes toppunktet langs linjen med ligningen $y = -2x + 9$. ◊