Mere om andengradspolynomiet

Jens Carstensen, Tårnby Gymnasium

I LMFK-Bladet nr. 6, november 2009, anførtes nogle egenskaber ved koefficienterne i det almindelige andengradspolynomium $f(x) = ax^2 + bx + c$. Vi skal her se på en interessant geometrisk egenskab ved rødderne.

Vi betragter et *normeret* andengradspolynomium $f(x) = x^2 + px + q$, og forudsætter desuden, at diskriminanten er positiv, så der er to reelle rødder x_1 og x_2, hvor vi kan forudsætte $x_1 < x_2$. Så er

$$x_1 + x_2 = -p \text{ og } x_1x_2 = q.$$

Det kan nu være et lille projekt i simpel analytisk geometri at vise følgende bemærkelsesværdige sætning, som nok ikke er særlig kendt:

Sætning

Den cirkel, der går gennem et normeret andengradspolynomiums tre skæringspunkter med koordinatakserne $A\ (x_1,0)$, $B\ (x_2,0)$ og $C\ (0,q)$, går desuden altid gennem punktet $D\ (0,1)$

Bevis

Vi anfører først et argument, der bygger på kordesætningen: Produktet af de kordedelængder, som to korder i en cirkel deler hinanden i, er konstant.

Hvis rødderne har modsatte fortegn, dvs. $x_1 < 0 < x_2$, er koordinatsystemets begyndelsespunkt O et indre punkt i cirklen. Længderne er så

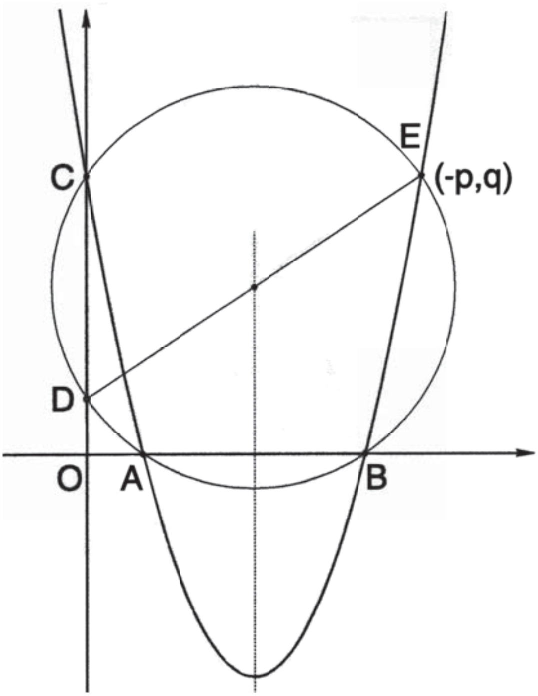
$$|OA| = -x_1,\ |OB| = x_2,\ |OC| = -q,$$

og efter kordesætningen er så

$$|OA| \cdot |OB| = |OC| \cdot |OD| \Leftrightarrow$$
$$-x_1 \cdot x_2 = -q \cdot |OD| \Leftrightarrow$$
$$|OD| = 1,$$

fordi $q = x_1x_2$. Da D ligger over x-aksen, er altså $D(0,1)$.

Matematik



Hvis rødderne har samme fortegn, for eksempel $0 < x_1 < x_2$, ligger O uden for cirklen gennem A, B og C. Kordesætningen bliver så til sekantsætningen, og her gælder igen

$|OA| \cdot |OB| = |OC| \cdot |OD| \Leftrightarrow$
$x_1 \cdot x_2 = q \cdot |OD| \Leftrightarrow$
$|OD| = 1,$

og igen er D (0,1).

Man kan indvende, at vore elever ikke kender kordesætningen eller sekantsætningen, og derfor må vi ty til analytisk geometri. Det er dog ikke forbundet med de store vanskeligheder.

Linjen BC har hældningen $\frac{-q}{x_2}$, og midtnormalen til linjestykket BC har derfor hældningen $\frac{x_2}{q}$, og da midtpunktet af BC er $\left(\frac{1}{2}x_2, \frac{1}{2}q_2\right)$, er midtnormalens ligning

$$y - \frac{1}{2}q = \frac{x_2}{q}\left(x - \frac{1}{2}x_2\right).$$

Da midtnormalen for AB har ligningen

$$x = \frac{1}{2}(x_1 + x_2),$$

kan vi finde centrum for cirklen som midtnormalernes skæringspunkt ved at indsætte den sidstnævnte x-værdi:

$$\begin{aligned} y &= \frac{q}{2} + \frac{x_2}{q} \cdot \left(\frac{1}{2}(x_1 + x_2) - \frac{1}{2}x_2\right) \\ &= \frac{q}{2} + \frac{x_2}{q} \cdot \frac{x_1}{2} \\ &= \frac{q}{2} + \frac{x_1 x_2}{2q} \\ &= \frac{q^2 + q}{2q} \\ &= \frac{1}{2}(q + 1) \end{aligned}$$

Altså har centrum for cirklen gennem A, B og C koordinaterne

$$\left(\frac{1}{2}(x_1 + x_2), \frac{1}{2}(q + 1)\right) = \left(-\frac{1}{2}p, \frac{1}{2}(q + 1)\right).$$

Radius R i cirklen er bestemt ved

$$\begin{aligned} R^2 &= \left(\frac{1}{2}p - 0\right)^2 + \left(\frac{1}{2}(q + 1) - q\right)^2 \\ &= \frac{1}{4}p^2 + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2}q\right)^2. \end{aligned}$$

Afstanden d fra centrum til punktet (0,1) er

$$\begin{aligned} d^2 &= \left(-\frac{1}{2}p - 0\right)^2 + \left(\frac{1}{2}(q + 1) - 1\right)^2 \\ &= \frac{1}{4}p^2 + \left(\frac{1}{2}q - \frac{1}{2}\right)^2 \\ &= R^2. \end{aligned}$$

og derfor ligger D på cirklen som påstået.

Vi kan imidlertid få mere ud af figuren. Cirklen og parablen har endnu et skæringspunkt E, og dette viser sig at have koordinaterne $(-p, q)$. Dette punkt ligger på cirklen, fordi DE netop er diameter. Koordinaterne til midtpunktet af DE er jo

$$\left(\frac{1}{2}(-p + 0), \frac{1}{2}(q + 1)\right)$$

som er koordinaterne til centrum. Desuden ligger E på parablen, fordi

$$f(-p) = (-p)^2 + p \cdot (-p) + q = q.$$

Dette giver en måde at konstruere rødderne på: Forbind punkterne med koordinaterne (0,1) og $(-p,q)$ med et linjestykke. Med dette linjestykke som diameter tegnes en cirkel. Cirklen skærer da x-aksen i de to rødder. ◊