Om eksponentialfunktioner

Jens Carstensen, Tårnby Gymnasium

Som bekendt er linjen med ligningen $y = x + 1$ tangent til grafen til eksponentialfunktionen med grundtal e i punktet (0,1). Vi skal her se på et beslægtet problem:

> Hvilken eksponentialfunktion $f(x) = a^x$ $(a > 1)$ har en graf med linjen $y = x$ som tangent?

Vi har, at

$$f'(x_0) = a^{x_0} \cdot \ln(a)$$

så tangenten til grafen i punktet $(x_0, f(x_0))$ har ligningen

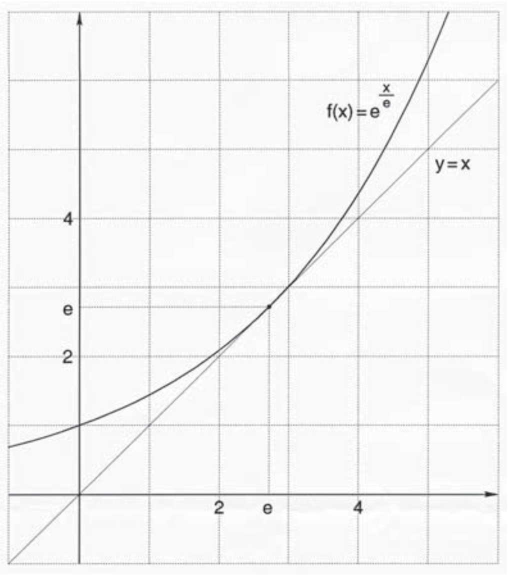
$$y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) \Leftrightarrow$$

$$y = a^{x_0} + a^{x_0} \cdot \ln(a) \cdot (x - x_0) \Leftrightarrow$$

$$y = a^{x_0} \cdot \ln(a) \cdot x + a^{x_0} - a^{x_0} \cdot \ln(a) \cdot x_0$$

Hvis denne ligning skal stemme overens med ligningen $y = x$, må

$$a^{x_0} \cdot \ln(a) = 1$$



og

$$a^{x_0} - a^{x_0} \cdot \ln(a) \cdot x_0 = 0$$

Den sidste ligning giver

$$1 - \ln(a) \cdot x_0 = 0 \Leftrightarrow$$

$$x_0 = \frac{1}{\ln(a)}$$

og indsætter vi dette i den første, får vi

$$a^{\frac{1}{\ln(a)}} \cdot \ln(a) = 1 \Leftrightarrow$$

$$a^{\frac{1}{\ln(a)}} = \frac{1}{\ln(a)} \qquad (1)$$

For at løse denne ligning i a sætter vi

$$z = \frac{1}{\ln(a)}$$

så at

$$\ln(a) = \frac{1}{z} \Leftrightarrow a = e^{\frac{1}{z}}$$

Så kan ligningen (1) skrives sådan:

$$\left(e^{\frac{1}{z}}\right)^z = z \Leftrightarrow$$

$$z = e$$

og dermed

$$a = e^{\frac{1}{z}} = e^{\frac{1}{e}} \approx 1{,}445$$

Dermed er den ønskede værdi af a fundet. Tangentens røringspunkt med grafen til funktionen

$$f(x) = e^{\frac{x}{e}}$$

er

$$x_0 = \frac{1}{\ln(a)} = e$$

og

$$f(x_0) = f(e) = e,$$

et særdeles smukt resultat.

Henvisning

John Robert Perrin: *An Intriguing Exponential Inequality* (Mathematics Teacher, Vol. 103, No. 1, August 2009) ◊