Kurve og flade – eksponenten 3

Jørgen Angelo, Ingeniørhøjskolen København

I LMFK-bladet nr. 4, 2009 så vi på kurver og flader med lige eksponenter. Disse kurver og flader var lukkede. Denne gang ser vi på eksponenten 3. Både kurven og fladen er åbne.

Kurven $x^3 + y^3 = 1$

Vi har funktionen $f(x) = (1 - x^3)^{\frac{1}{3}}$

Symmetri-argumentet

Vi ser på formlen $x^3 + y^3 = 1$. Denne formel er symmetrisk med hensyn til x og y. Har vi fundet en sammenhæng mellem x og y, vil vi, hvis vi bytter om på x og y, finde den samme sammenhæng en gang til. Derfor er grafen symmetrisk om linien $y = x$.

Monotoniforhold

Når vi differentierer $f(x)$, får vi

$$f\,'(x) = \frac{1}{3} \cdot (1 - x^3)^{\frac{-2}{3}} \cdot (-3x^2).$$

Ved lidt omskrivninger fås

$$f\,'(x) = -\left(\frac{x}{y}\right)^2$$

Denne er ikke defineret, for $y = 0$, men har grænseværdien $-\infty$. Vi laver et skema:

x	$x < 0$	0	$0 < x < 1$	1	$x > 1$
$f\,'(x)$	negativ	0	negativ	"$-\infty$"	negativ
$f(x)$	aftagende	vandret vendetang.	aftagende	lodret vendetang.	aftagende

A) Først ser vi på intervallet $0 < x < 1$

I dette interval vil både x og y være ikke-negative, og det har derfor ingen betydning for fortegnet af x^n og y^n, at eksponenten er ulige. Kurven vil i grove træk "opføre sig på samme måde", som hvis n var lige, og vil minde meget om superellipsen.

B) Vi lader nu $x > 1$

I dette interval vil y være negativ, og for stigende værdi af x vil x^3 og y^3 "holde hinanden i skak" ved at $y \approx -x$. Man får altså i dette interval en skrå asymptote $y = -x$.

Bevis

Ved at isolere y^3 i den oprindelige ligning og dividere ligningen med x^3, fås

$$\left(\frac{y}{x}\right)^3 = \frac{1}{x^3} - 1.$$

Da $x > 1$, må $\frac{1}{x^3} \to 0$ for $x \to \infty$. Det betyder, at

$$\left(\frac{y}{x}\right)^3 \to -1,\ \frac{y}{x} \to -1 \text{ eller } y \to -x \text{ for } x \to \infty.$$

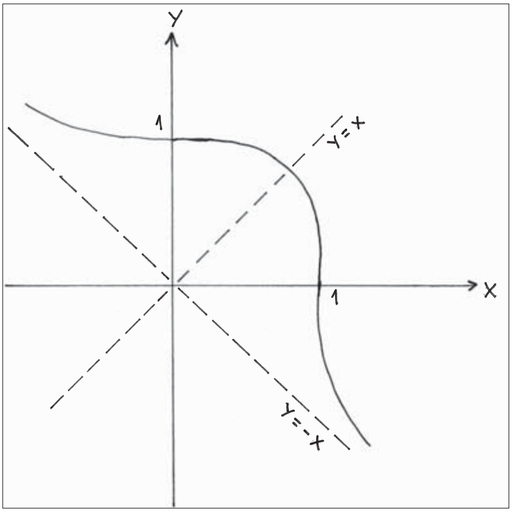
Vi har altså linien $y = -x$ som asymptote for $x > 1$ og $x \to \infty$.

Q.E.D.

C) Vi lader $x < 0$

Ved at bytte om på x og y og bruge symmetriargumentet, kan vi påvise den samme skrå asymptote $y = -x$ som i punkt B).

Se figur 1.



Figur 1

Matematik

Fladen $x^3 + y^3 + z^3 = 1$

Symmetri-argumentet

Vi ser på formlen $x^3 + y^3 + z^3 = 1$. Denne formel er symmetrisk med hensyn til x, y og z. Hver gang vi sætter en af de variable konstant og finder en sammenhæng mellem de øvrige to variable, vil man ved bogstavombytning kunne finde to fuldstændig analoge sammenhænge. Dette gælder altså for alle nedenstående sammenhænge.

Et par overordnede betragtninger

Når både x, y og z er ikke-negative, vil vi få samme resultat som nævnt for kurven under punkt A. Fladen vil ligne "superellipsoiden".

Hvis vi derimod holder z konstant, så vi ligger på en niveaukurve parallel med xy-planet, hvor $x \rightarrow \pm\infty$ vil x^3 og y^3 "holde hinanden i skak" ved at $y \approx -x$. Niveaukurven har altså en skrå asymptote.

A) Den rette linie: $z = 1, y = -x$

Hvis vi sætter $z = 1$, får vi $x^3 + y^3 + 1^3 = 1$ eller

$x^3 + y^3 = 0$ eller $y^3 = -x^3$. Hvis vi tager kubikroden på begge sider af lighedstegnet får vi

$$y = -x, \text{ idet } \sqrt[3]{-x^3} = -x.$$

Da samtidig $z = 1$, har vi her en vandret linie parallelt med xy-planet.

Ved hjælp af symmetriargumentet fås 2 andre rette linier: $y = 1, z = -x$ eller $x = 1, z = -y$. De tre rette linier danner parvis en mindste vinkel på 60°.

B) Asymptoteplanet: $y = -x$ for z = konstant, $x \rightarrow \pm\infty$

Hvis vi sætter x forskellig fra 0 og dividerer ligningen igennem med x^3, får vi ligningen

$$1 + \frac{y^3}{x^3} + \frac{z^3}{x^3} = \frac{1}{x^3}$$

Dette kan omskrives til

$$\frac{y^3}{x^3} = \frac{1}{x^3} - \frac{z^3}{x^3} - 1$$

Vi forestiller os nu, at vi bevæger os på en niveaukurve, hvor z er konstant, samtidig med at vi lader $x \rightarrow \pm\infty$. De to første led på højre side af lighedstegnet vil da gå mod 0, således at

$$\frac{y^3}{x^3} \rightarrow -1 \text{ for } x \rightarrow \pm\infty.$$

Hvis vi tager kubikroden på begge sider af pilen, får vi

$$\frac{y}{x} \rightarrow -1 \text{ eller } y \rightarrow -x.$$

Det vil altså sige, at vi nærmer os asymptotisk planet $y = -x$. Ovenstående er tilfældet for enhver værdi af z, undtagen $z = 1$.

Hvis vi vender tilbage til resultatet fra A) kan vi konstatere, at for $z = 1$ er niveaukurven sammenfaldende med asymptoteplanet $y = -x$.

Ved hjælp af symmetriargumentet fås to andre asymptoteplaner: $z = -x$ og $z = -y$. De 3 asymptoteplaner danner parvis en mindste vinkel på 60° og er med til at forme den bugtede flade.

C) Monotoniforhold for niveaukurve

Vi ser på en niveaukurve med konstant $z = k$. Vi får da

$$x^3 + y^3 + k^3 = 1 \text{ eller } y = \left(1 - x^3 - k^3\right)^{\frac{1}{3}}.$$

Her kan vi med fordel se igen på figur 1, hvor $k = 0$. Vores nye kurve er kun en smule anderledes, idet man skal tænke sig z-aksen gå vinkelret ud af papirets plan. Kurven skærer xz-planet for

$$x = (1 - k^3)^{\frac{1}{3}}$$

og tilsvarende yz-planet for

$$y = (1 - k^3)^{\frac{1}{3}}.$$

Hvis vi differentierer y med hensyn til x, får vi

$$y'(x) = \frac{1}{3} \cdot \left(1 - x^3 - k^3\right)^{\frac{-2}{3}} \cdot (-3x^2)$$

Ved lidt omskrivninger fås

$$y'(x) = -\left(\frac{x}{y}\right)^2.$$

Denne er ikke defineret, for $y = 0$, men har grænseværdien $-\infty$. Vi laver et skema, se næste side.

Som grafen viser, "buler" kurven indad i 1. kvadrants retning. Det svarer i de 3 dimensioner til, at niveaukurven "buler" indad i 1. oktants retning.

Monotoniskemaet passer imidlertid kun hvis

x		0		$(1 - k^3)^{\frac{1}{3}}$	
Be-mærk		Skæring m. *yz*-plan		Skæring m. *xz*-plan	
$f\,'(x)$	Ne-gativ	0	Ne-gativ	"$-\infty$"	Ne-gativ
$f\,(x)$	Afta-gende	Vende-tang. i *x*-retn.	Afta-gende	Vende-tang. i *y*-retn.	Afta-gende

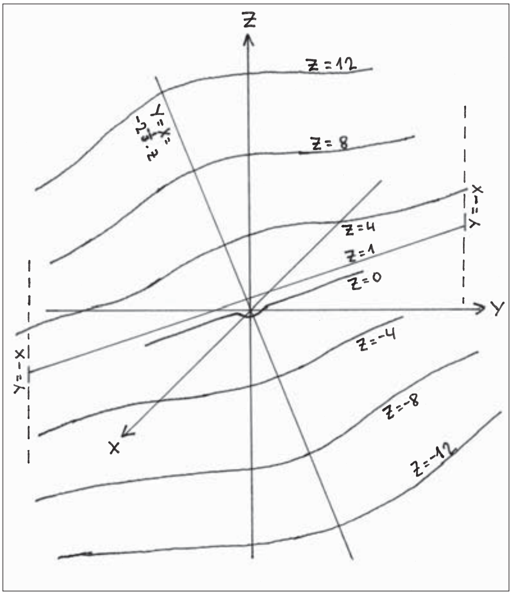
$(1 - k^3)^{\frac{1}{3}} > 0$, hvilket kræver, at $k < 1$. Vi skal altså ligge under det vandrette plan $z = 1$.
Vi husker også, at for $z = k = 1$ bliver vores niveaukurve identisk med den rette linie $y = -x$.

For $z = k > 1$, bliver $(1 - k^3)^{\frac{1}{3}} < 0$, og billedet vender om, svarende til, at grafen i figur 1 bliver spejlet om origo.

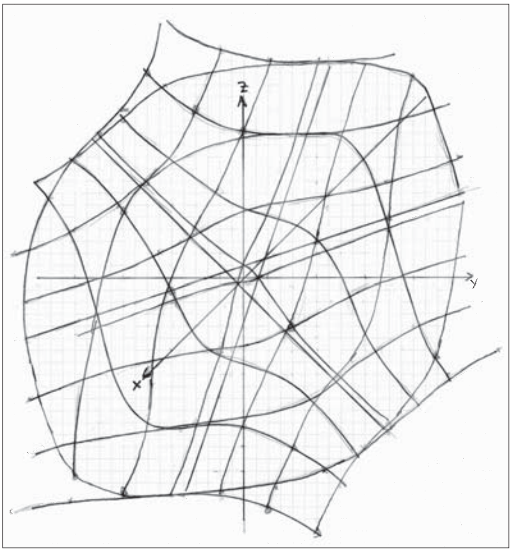
Kort sagt "buler" niveaukurverne over planet $z = 1$ den modsatte vej af niveaukurverne under planet $z = 1$. Se figur 2.

D) Uendelig mange asymptoter: $y = k \cdot x$, $x = -(1 + k^3)^{\frac{-1}{3}} \cdot z$, $z \to \pm\infty$, $k \in R$

Vi ser på skæringspunktet mellem vores flade og planet $y = k \cdot x$, $k \in R$. Hvis vi sætter $y = k \cdot x$



Figur 2



Figur 3

i ligningen for fladen, fås $x^3 + (k \cdot x)^3 + z^3 = 1$. Dette kan omformuleres til $(1 + k^3) \cdot x^3 + z^3 = 1$. Hvis vi dividerer ligningen med z^3, fås

$$(1 + k^3) \cdot \left(\frac{x}{z}\right)^3 + 1 = \frac{1}{z^3}$$

Hvis vi lader $z \to \pm\infty$, vil $\frac{1}{z^3}$ og dermed også

$$(1 + k^3) \cdot \left(\frac{x}{z}\right)^3 + 1 \to 0.$$

Dermed får vi

$$\left(\frac{x}{z}\right)^3 \to -\frac{1}{(1+k^3)} \text{ eller}$$

$$\frac{x}{z} \to -\frac{1}{(1 + k^3)^{1/3}} = -(1 + k^3)^{\frac{-1}{3}} \text{ eller}$$

$$x \to -(1 - k^3)^{-\frac{1}{3}} \cdot z$$

Vi har altså for enhver værdi af k en asymptote for vores flade, når $z \to \pm\infty$. Det vil sige uendelig mange asymptoter. Undtaget er dog $k = -1$, der giver den rette linje $y = -x$, $z = 1$, som er omtalt under A).

Bemærk også, at for relativt store værdier af k betyder 1-tallet i formlen mindre og mindre, så formlen kan tilnærmes med $x \to -\frac{1}{k} \cdot z$ for store værdier af k.

Ved hjælp af symmetriargumentet fås også uendelig mange asymptoter, når $x \to \pm\infty$ og $y \to \pm\infty$. Vi har altså en 3-dobbelt uendelighed af asymptoter i vores flade.

I en opfølgende artikel vil jeg prøve at behandle de andre flader med ulige eksponent, hvor $n \to \infty$. ◊