Parablens toppunkt

Jens Carstensen, Tårnby Gymnasium

Udledning af koordinaterne til parablens toppunkt er i de fleste lærebøger for gymnasiet en lidt besværlig affære med en del bogstavregning, som vore elever ikke mere er trænet i. På forskellige måder fås, at toppunktet for parablen med ligningen

$$y = ax^2 + bx + c$$

har x-koordinaten $\frac{-b}{2a}$, og derefter udregnes under en del symbolmanipulation $f\left(\frac{-b}{2a}\right)$, hvor f er funktionen med parablen som graf.

Vi prøver at gøre det en smule simplere. På figuren er det klart, at ligningerne

$$f(x) = k_2,\ \ f(x) = k,\ \ f(x) = k_1$$

har henholdsvis 2, 1 og 0 løsninger. Vi kan derfor sige, at hvis (h,k) er koordinaterne til parablens toppunkt, har ligningen $f(x) = k$ præcis én løsning (og omvendt). Ligningen

$$f(x) = k \Leftrightarrow$$

$$ax^2 + bx + c = k \Leftrightarrow$$

$$ax^2 + bx + c - k = 0 \qquad (1)$$

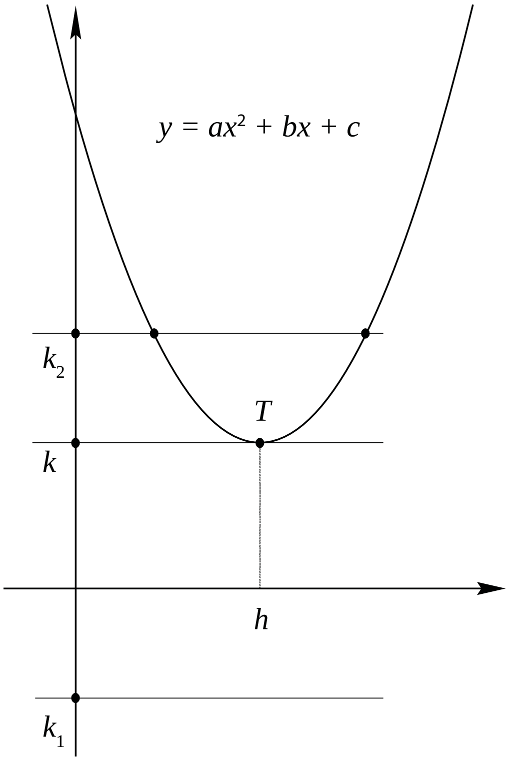
skal altså have præcis 1 løsning. Dette sker efter teorien fra andengradsligningen, hvis diskriminanten er 0, dvs. når

$$b^2 - 4a(c-k) = 0 \Leftrightarrow$$

$$b^2 - 4ac = -4ak \Leftrightarrow$$

$$k = -\frac{d}{4a}$$

Dermed er toppunktets y-koordinat k bestemt.



Fra teorien for andengradsligningen véd vi, at den ene løsning til ligningen (1) er

$$x = -\frac{b}{2a}.$$

Altså er toppunktets koordinater fundet til

$$T\left(-\frac{b}{2a}, -\frac{d}{4a}\right).$$

Det virker som om denne metode kræver langt færre komplicerede bogstavregninger end de gængse lærebogsmetoder.

Den er hermed stillet til fri afbenyttelse. ◊

Matematik