Cosinusrelationen – et anderledes bevis

JENS CARSTENSEN, Tårnby Gymnasium

Det traditionelle bevis for cosinusrelationen anvender Pythagoras sætning på de to retvinklede trekanter, hvori en højde i den spidsvinklede trekant deler trekanten. Vi skal her anføre et bevis, der er mere geometrisk og desuden anvender mindre symbolmanipulation.

På siderne i ΔABC tegnes kvadrater udvendig og højderne i trekanten er AH, BK og CJ. Højdernes forlængelser skærer de modstående sider i kvadraterne i N, E og F. Derved deles hvert kvadrat i to rektangler.

Vi skal nu se, at to rektangler, der har en fælles vinkelspids i en af trekantens vinkelspidser, har samme areal.

Betragt fx vinkel A. Da ΔAKB og ΔAJC er retvinklede, er

$$\cos(A) = \frac{AK}{AB} \Leftrightarrow AK = c \cdot \cos(A)$$

og

$$\cos(A) = \frac{AJ}{AC} \Leftrightarrow AJ = b \cdot \cos(A)$$

Derfor har de rektangler, der har fælles vinkelspids i A, arealerne

$$[AKED] = AK \cdot AD = c \cdot \cos(A) \cdot b$$

og

$$[AJFG] = AJ \cdot AG = b \cdot \cos(A) \cdot c.$$

Rektanglerne har altså samme areal, nemlig

$$T_1 = bc \cdot \cos(A).$$

På samme måde har de øvrige par af rektangler samme arealer T_2 og T_3 som vist på figuren. Vi har så

$$T_2 = c^2 - T_1 = c^2 - bc \cdot \cos(A)$$

og

$$T_3 = b^2 - T_1 = b^2 - bc \cdot \cos(A)$$

Men så er

$$a^2 = T_2 + T_3$$

$$= c^2 - bc \cdot \cos(A) + b^2 - bc \cdot \cos(A)$$

$$= b^2 + c^2 - 2\, bc \cdot \cos(A).$$

Dette er cosinusrelationen.

I beviset har vi kun benyttet sætningen om cosinus til en vinkel i en retvinklet trekant, og desuden er omfanget af bogstavregning ganske beskedent. ◊