Fra cirkel til kvadrat – lige eksponent

JØRGEN ANGELO, Ingeniørhøjskolen København

I denne og en kommende udgave af LMFK-bladet vil vi se på kurverne $x^n + y^n = 1$ og fladerne $x^n + y^n + z^n = 1$ for $n \in N$ og $n \to \infty$.

I matematik på højniveau lærer man om kurven $x + y = 1$, som giver en ret linie, og fladen $x + y + z = 1$, som giver en plan. Man lærer også om kurven $x^2 + y^2 = 1$, som giver en cirkel, og fladen $x^2 + y^2 + z^2 = 1$, som giver en kugle. En ret kendt figur er også superellipsen $x^4 + y^4 = 1$ og det, vi kan kalde "superellipsoiden" $x^4 + y^4 + z^4 = 1$. Kort fortalt sker der det, at når man putter et ekstra led med z ind i ligningen, går man fra en kurve til en flade, som er kurvens 3-dimensionale udgave.

Åbne og lukkede kurver

Hvis vi ser på ligningen $x^n + y^n = 1$ og prøver at isolere y, får vi på grund af potensregningens regler to typer resultater. Når n er *ulige*, er

$$y = \left(1 - x^n\right)^{\frac{1}{n}}$$

svarende til én rod. Det vil sige kun én åben kurve. F.eks. for $n = 1$, får man en ret linie. Når n er *lige*, er

$$y = \pm\left(1 - x^n\right)^{\frac{1}{n}}$$

svarende til to rødder. Det vil sige to åbne kurver, som er symmetriske om x-aksen, og som altid danner én lukket kurve. F.eks. for $n = 2$, får man to halvcirkler, som tilsammen danner hele cirklen.

Åbne og lukkede flader

Hvis vi ser på ligningen $x^n + y^n + z^n = 1$ og prøver at isolere z, gælder der nøjagtig de samme forhold som ovenfor:

Når n er *ulige*, er

$$z = \left(1 - x^n - y^n\right)^{\frac{1}{n}}$$

svarende til én rod. Det vil sige kun én z-værdi, og dermed en åben flade. F.eks. for $n = 1$, får man en plan.

Når n er *lige*, er

$$z = \pm\left(1 - x^n - y^n\right)^{\frac{1}{n}}$$

svarende til to rødder. Det vil sige to åbne flader, som er symmetriske om xy-planet, og som altid danner én lukket flade. F.eks. for $n = 2$, får man to halvkugler, som tilsammen danner hele kuglen.

Kurver med lige eksponent

Vi sikrer os en lige eksponent, hvis vi laver formlen om til $x^{2n} + y^{2n} = 1$. Lad os se, hvad der sker når vi øger eksponenten, så den gennemløber alle de lige naturlige tal. Det vil sige $n \in N$, $n \to \infty$. Hvis man forsøger sig med at tegne grafen for de to funktioner

$$y = \pm\left(1 - x^{2n}\right)^{\frac{1}{2n}}$$

kan man se, at man for stigende værdier af n får en mere og mere kantet figur, som går *uendelig tæt på et kvadrat*, når $n \to \infty$. Det vil jeg bevise ud fra grænseværdibetragtninger.

Bevis

Vi ser igen på ligningen $x^{2n} + y^{2n} = 1$. Vi konstaterer først, at $x^{2n} \le 1$ og $y^{2n} \le 1$, eftersom ingen af leddene er negative og summen af dem skal give 1. Dernæst viser vi, at for $|x| > |y|$, vil graferne gå mod de to lodrette linier $x = \pm 1$. Ved at dividere ligningen igennem med x^{2n} får vi

$$1 + \left(\frac{y}{x}\right)^{2n} = \frac{1}{x^{2n}}.$$

Dette kan omskrives til

$$\left(\frac{y}{x}\right)^{2n} = \frac{1}{x^{2n}} - 1.$$

Da $|x| > |y|$, må

$$\left(\frac{y}{x}\right)^{2n} < 1,$$

og dette udtryk må nødvendigvis gå mod nul for n gående mod uendelig. Det vil sige

$$\left(\frac{y}{x}\right)^{2n} \to 0 \text{ for } n \to \infty,$$

og dermed også

$$\frac{1}{x^{2n}} - 1 \to 0,$$

hvilket nødvendigvis betyder, at $|x| \to 1$. Men da dette er tilfældet uafhængigt af y, kan vi kun få linierne $|x| = 1$, eller $x = \pm 1$.

Vi ville med tilsvarende betragtninger kunne vise, at graferne går mod de to vandrette linier $|y| = 1$, eller $y = \pm 1$ for $|y| > |x|$.

Dermed har vi vist, at den samlede "grænsekurve" er sat sammen af linierne $x = \pm 1$ og $y = \pm 1$.

Da vi i øvrigt startede med at konstatere, at $|x| < 1$ og $|y| < 1$ afskæres linierne til 4 liniestykker, som tilsammen danner et kvadrat.

Vi mangler dog lige at vise, hvad der sker med kurven, når $|y|=|x|$. Ligningen kan da omskrives til

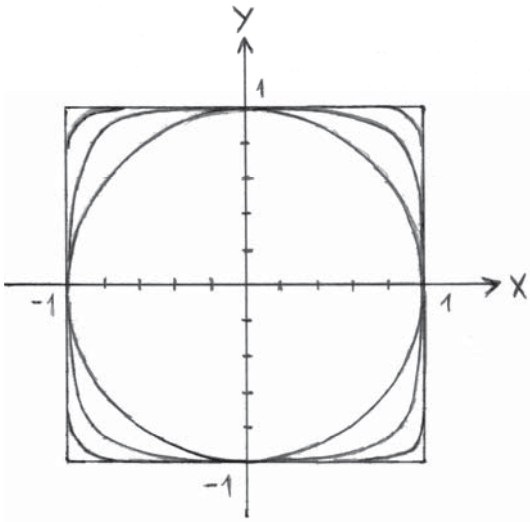
$$2 \cdot x^{2n} = 1 \text{ eller } |x| = \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{2n}}.$$

Dette udtryk går mod 1 for $n \to \infty$, så $x \to \pm 1$. Tilsvarende kan vi vise det samme for y. Vi får altså kvadratets hjørner (-1;-1), (-1;1), (1;1) og (1;-1) for $|y| = |x|$.

Q.E.D.

Ovenfor har jeg skitseret kurverne for eksponenterne 2, 4 og 8 samt kvadratet, som udgør "grænsekurven" for $n \to \infty$.

Man kan også efterprøve med kurveeksempler på den grafiske lommeregner.



Flader med lige eksponent

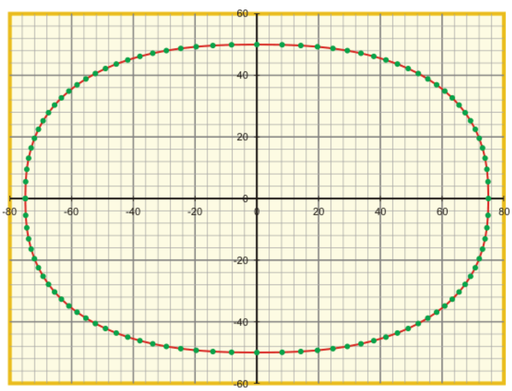
Her vil jeg nøjes med at pege på, at man intuitivt må forvente, at flader af typen $x^{2n} + y^{2n} + z^{2n} = 1$ må opføre sig på samme måde som kurver af typen $x^{2n} + y^{2n} = 1$ for $n \to \infty$. Vi må altså forvente, at fladen nærmer sig en terning.

Dette kan man også efterprøve på den grafiske lommeregner med 3D-figurer.

I en kommende udgave af LMFK-bladet vil vi se på kurver og flader med ulige eksponent.◊

Mere om superellipsen

Ovenstående artikel er en god anledning til at genopfriske matematikken bag superellipsen. En smuk gennemgang heraf – med praktiske eksempler – kan man finde på Erik Vestergaards *Matematik Sider.*



Nedenstående figur og indholdsfortegnelse er hentet på www.matematiksider.dk/piethein.html:

- Sergels torg i Stockholm
- Superellipse bord
- Hvordan tegner man en superellipse?
- Gabriel Lamé
- Superellipse mania!
- Lidt om krumning
- Det stabile superæg
- Areal og volumen
- Hjemmelavet superellipse bord
- Højttaler med superellipse design
- Superæg flydere til bundgarn
- Piet Hein
- Links
- Litteratur.