

Mandatfordelinger og retfærdighed

ERIK VESTERGAARD, Haderslev Katedralskole,
www.matematiksider.dk

Matematik i et AT-forløb og i SRP: Hvilken matematik ligger bag folketingsvalg og valg i det hele taget?

De færreste er formentlig bekendt med det; det var undertegnede heller ikke indtil efteråret 2008, hvor en historiekollega foreslog et AT-forløb med emnet "Det amerikanske valg". Som så ofte før med AT måtte man som matematiklærer bryde sin hjerne for at finde egnet stof. Jeg kom til at tænke på en bog med titlen *Matematik og retfærdighed – Mandatfordelingsproblemet*, som jeg havde købt nogle måneder i forvejen, men endnu ikke fået læst. Jeg har siden af forfatteren, Ebbe Thue Poulsen fra Aarhus Universitet, fået oplyst, at han skrev bogen efter et kursus på Matematisk Institut med titlen "Aspekter" målrettet mod kommende gymnasielærere. I kurset var der en historiedel, en filosofidel og endelig en anvendelsesdel. Det var sidstnævnte, som Ebbe Thue Poulsen skulle tage sig af. Deltagerne i kurset skulle holde et foredrag om et selvvalgt emne, og her kom valg og afstemningsprocedurer på banen. Kurset inspirerede Ebbe Thue Poulsen til flere gange at holde et foredrag for gymnasieklasser om mandatfordelingsproblemet. Forløbet mandede ud i hans bog. Tilbage til mit AT-forløb: Efter at have kigget nærmere i bogen meldte jeg tilbage til mine kolleger i historie og engelsk, at jeg kunne være med på deres forslag til AT-forløb, som jo var meget aktuelt op til det amerikanske valg mellem John McCain og Barack Obama.

Forskellige metoder til fordeling af mandater

Man skulle umiddelbart tro, at der findes en mere eller mindre kanonisk måde at fordele mandater på ud fra givne stemmetal, altså en metode, som vil være den oplagte og eneste fornuftige. Det viser sig imidlertid *ikke* at være tilfældet, og det er da også derfor, at der kommer noget interessant matematik ud af det. Lad s_p betegne stemmetallet for partiet P og S betegne det totale stemmetal. Lad endvidere m_p betegne mandattallet for partiet P og M repræsentere det samlede antal

mandater, der er til rådighed. Man vil nok sige, at partiet P skal tildeles samme brøkdelt af mandaterne, som partiets stemmetal udgør af det totale stemmetal, altså at partiet skal have tildelt $(s_p/S) \cdot M$ mandater. Problemet er blot, at denne størrelse, som i fagsproget kaldes for partiets *kvota* k_p , meget sjældent er et helt tal. Man kan ikke bare foretage en *afrunding*, fordi det så kan hændes, at summen af mandattallene ikke giver M . Vi forudsætter her, at M er et fast tal, som er givet på forhånd. Det første bud vil nok være at sige, at hvert parti i hvert fald skal have tildelt det antal mandater, som svarer til *heltalsdelen* af deres kvota, hvorefter man kan fordele de tiloversblevne mandater med et til hver af de partier, der har den *største brøkdelt* i kvotaen. Metoden hedder derfor passende *Største brøks metode*. I eksemplet nedenfor skal 17 mandater fordeles mellem 5 partier. De partier, der får et ekstra mandat, har fået farvet kvotaen rød.

Største brøks metode

Parti	Stemmetal	Procent	Kvota	Mandattal
A	431	8,4	1,43	2
B	1007	19,7	3,35	3
C	722	14,1	2,40	2
D	2660	52,0	8,84	9
E	294	5,7	0,98	1
Sum	5114	100	17,00	17

Vi skal senere se, at denne metode – hvor naturlig den end lyder – har nogle temmelig uheldige egenskaber. Den belgiske jurist og matematiker *Victor D'Hondt* (1841 - 1901) beskrev i 1878 en anden mandatfordelingsmetode. Metoden går under navnet *D'Hondts metode*, og den går ud på, at man dividerer stemmetallene for hvert parti med divisorerne 1, 2, 3, 4 etc. Man betragter herefter kvotienterne, og de M største kvotienter giver hver anledning til et mandat. På figuren nedenfor er de 17 største kvotienter (afrundet til hele



tal) markeret med rødt. Vi ser, at det giver følgende mandatfordeling for partierne A, B, C, D og E: 1 – 3 – 2 – 10 – 1. Altså et andet resultat end det man får ved at benytte største brøks metode!

D'Hondts metode er blot et specialtilfælde af en hel familie af metoder, som betegnes *divisor-metoder*. Sainte-Laguës metode anvender således som divisorer de ulige tal, 1, 3, 5, 7 etc.

Paradokset i Repræsentanternes Hus

Den mest spektakulære udstilling af en uhen-sigtsmæssighed ved en mandatfordelingsmetode er vel den, der blev demonstreret i 1880 i USA. Hvert 10. år bliver der foretaget folketællinger i USA, og hver stat i USA får tildelt et mandattal i

Repræsentanternes Hus med udgangspunkt i statens befolkningstal – statens befolkningstal indtager simpelthen rollen af et “stemmetal”, som om staten var et parti ved et valg! Mens hver stats mandattal i Repræsentanternes Hus fastsættes ud fra folketællingerne, så fastlægges partikuløren på de enkelte mandater ved de egentlige valg i USA. Imidlertid har antallet af mandater i Repræsentanternes Hus ikke altid været det samme. I 1790 var der 105, i dag er der 435 mandater. Forøgelsen af mandattallet begrundes både i at antallet af stater i USA er vokset fra 15 i 1790 til 50 i dag, og i at befolkningens størrelse nærmest er eksploderet i perioden. Mandattallet har altså ingenlunde været fast i USA's historie.

D'Hondts metode		Divisorer										
Parti	Stemmetal	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
A	431	431	215	143	107	86	71	61	53	47	43	39
B	1007	1007	503	335	251	201	167	143	125	111	100	91
C	722	722	361	240	180	144	120	103	90	80	72	65
D	2660	2660	1330	886	665	532	443	380	332	295	266	241
E	294	294	147	98	73	58	49	42	36	32	29	26

I 1880 magede folketællingerne sig således, at man observerede følgende besynderlighed: Hvis det samlede mandattal blev fastsat til 299, ville staten Alabama få 8 mandater, mens det kun ville opnå 7 mandater, hvis det samlede mandattal blev sat til 300. Paradokset består altså i, at en stat kan risikere at få færre mandater, selv om der er flere mandater til rådighed! Vi taler her om største brøks metode, der blev anvendt i perioden fra 1852 til 1901. Som årene gik, blev man mere og mere utilfreds med største brøks metode og i 1901 opstod der igen heftig debat i valgkomiteen. Formanden for komiteen havde taget tabeller med, der viste de forskellige stater mandattal for forskellige samlede mandattal på mellem 350 og 400. Repræsentanten fra staten Maine var meget oprevet. Her er et udpluk af hans herlige tale, hvori endda matematikken får en på hattepulden:

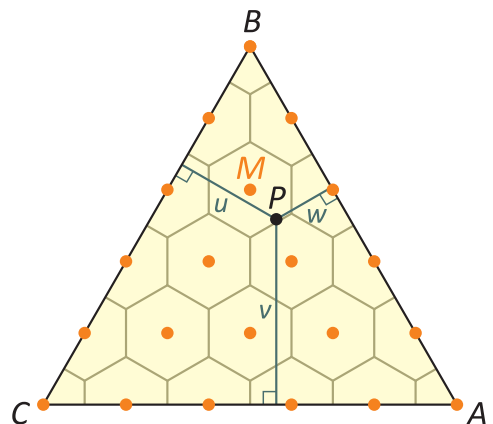
... Let me strike another paradox in connection with belabored and assulted Maine ... Maine loses on 382. She loses again with 386, and does not loose with 387 and 388. Then she loses again with 389 and 390, and then ceases to loose. Not only is Maine subjected to the assaults of the chairman of this Committee, but it does seem as though mathematics and Science had combined to make a shuttlecock and battledore of the State of Maine in connection with the scientific basis upon which this bill is represented ... In Maine comes and out Maine goes ... God help the State of Maine when mathematics reach for her and undertake to strike her down.

Den megen polemik betød, at man herefter gik over til at benytte *Websters metode*. I dag benyttes *lige store forholds metode*. Det vil føre for vidt at komme ind på disse her.

Geometrien tages til hjælp

Som så ofte før kan geometrien bidrage til at kaste lys over nogle matematiske sammenhænge. I tilfælde af, at der er netop 3 partier repræsenteret, kan man afbilde resultatet af en afstemning som et punkt P i en ligesidet trekant. Det forholder sig nemlig sådan, at summen af afstandene fra et punkt i den ligesidede trekant til hver af de tre si-

der er lig med *højden* i trekanten. Dette ses nemt ved en arealbetragtning for trekanterne APB , APC , BPC samt ABC . Hvis man siger, at højden er 1, har man altså at $u + v + w = 1$. Størrelsen u kan dermed repræsentere den brøkdel af stemmerne, som partiet A har fået. Tilsvarende for v og w for partierne henholdsvis B og C . I det aktuelle tilfælde på figuren har partiet A fået 30,4%, partiet B fået 17,8% og partiet C fået 51,8% af stemmerne. Lad os sige, at der er fem mandater til deling mellem de tre partier. Det gode er, at alle mulige mandatfordelinger nu også kan afbildes i trekanten, ikke blot et afstemningsresultat. På figuren nedenfor er samtlige mulige mandatfordelinger med 5 mandater afbildet i figuren med orange punkter. Det er ret oplagt, hvilken mandatfordeling hvert orange punkt svarer til. Punktet M svarer for eksempel til, at mandatfordelingen for partierne A , B og C er $1 - 3 - 1$.



Største brøks metode

Men hvad kan vi bruge det til? Et af svarene er, at vi – givet en konkret mandatfordelingsmetode – kan bestemme et “net”. Hvis et afstemningsresultat repræsenteret ved punktet P falder inden for en bestemt “maske” i dette net, så vil det føre til den mandatfordeling, som er repræsenteret ved det mandatfordelingspunkt, som befinder sig i masken. På figuren vil afstemningsresultatet repræsenteret ved P altså føre til mandatfordelingen givet ved M . Det er nettet for største brøks metode, der er afbildet på figuren. D’Hondts metode vil give et andet net.

Man kan sige at det matematiske indhold opstår i samspillet mellem det diskrete og det kontinuerte. Mandattallene repræsenterer det diskrete, mens stemmetallene repræsenterer det (stort set) kontinuerte. Hvilken mekanisme, der gør for eksempel Alabama paradokset mulig, kan illustreres geometrisk, men det vil føre for vidt at komme ind på her. Det kan læses i [1] eller på min hjemmeside om emnet.

Mandatfordelinger i et AT-forløb og i SRP

Det næste relevante spørgsmål er, hvor emnet kan finde anvendelse i undervisningen. Her er et AT-forløb med to af følgende fag vel nærliggende: historie, samfundsfag, engelsk og dansk. Jeg har talt hurtigt med en lærer fra hvert af disse fag. Historielæreren taler om Grundloven og om samtidigt at få to punkter inden for kernestoffet dækket ind: “dansk demokrati” og “national identitet”. Ellers kan man komme ind på enevælden, den gryende opposition i borgerskabet og bondestanden, en belysning af modsætningen mellem dansk og tysk og de efterfølgende krige. Samfundsfaglæreren kan tale om valg og sammenlignelige valgsystemer i forskellige lande. Dansk læreren kan være med på “demokratiets fødsel” og deri komme ind på Grundtvig og en debat om folkehøjskoler. “Politikerretorik” kan også studeres i faget dansk. Engelsk kan, hvis emnet er “Det amerikanske valg”, studere aktuelle avisartikler eller artikler fra tidsskrifter. Problematikken med registrering af vælgere i USA og “svingstater” kan tages op. Også borgerrettigheder og racespørgsmål kan man komme ind på.

Emnet Mandatfordelinger kan også tænkes benyttet i matematik alene som supplerende stof efter læseplanen. Endelig er der mulighed for at benytte det i en SRP opgave. En af mine elever endte faktisk med at skrive en formidlingsopgave i matematik og dansk. Eleven skrev en artikel, som skulle forestille at udkomme i *Illustreret Videnskab*. Opgavetitlen var *Mandatfordelingsproblemet – Hvem skal sidde her?* skrevet hen over et billede fra folketinget. Ellers vil historie naturligvis også være et oplagt fag at arbejde sammen med i en SRP opgave.

Generelt mener jeg, at emnet kan benyttes på alle niveauer. Der er det helt simple, hvor man

kun udregner mandattal ved brug af nogle få mandatfordelingsmetoder, til det sværere, hvor man benytter geometrien til at afdække blandt andet Alabama-paradokset og monotoni-paradokset (ikke gennemgået her). Der er også flere andre ting, som jeg har været nødt til at undlade her, blandt andet det faktum, at man kan tildele et *mål for uretfærdighed* både set fra et partis synspunkt og fra en vælgers synspunkt. Forskellige mandatfordelingsmetoder viser sig at være optimale i forbindelse med forskellige retfærdighedsmål. Der opstilles også en masse kriterier til en god mandatfordelingsmetode – kriterier som jeg har måttet undlade at omtale. Alt dette kan man læse om i bogen [1]. Ebbe Thue Poulsen har skrevet en rigtig god bog, hvor der gives gode eksempler, så læseren kan forstå, hvad der foregår. Der er også rigeligt stof i form af opgaver til den mere avancerede elev. Som beskrevet under *Links*, har jeg selv lavet en længere hjemmeside om emnet, også indeholdende lidt historie. Jeg har lavet en Excel VBA fil, som læseren kan downloade. Med den kan man hurtigt udregne mandatfordelinger for fem givne mandatfordelingsmetoder og sammenligne dem – når man er blevet træt af at udregne mandatfordelinger ved håndkraft!

Litteratur

- [1] Ebbe Thue Poulsen. *Matematik og retfærdighed – Mandatfordelingsproblemet*. Aspekt serien, Gyldendal, 2000.
- [2] Michel L. Balinsky, H. Peyton Young. *Fair Representation – Meeting the Ideal of One Man, One Vote*. Second edition. Brookings Institution Press, 2001.

Links

Nedenfor et link til min egen hjemmeside om emnet. Desuden kan du finde stof om danske valg på folketingets hjemmeside og på Indenrigs- og Socialministeriets hjemmeside. Sidstnævnte, der tidligere gik under navnet Velfærdsministeriet, står for valgene i Danmark. *Danmarks Statistik* hjælper her til.

- www.matematiksider.dk/mandatfordelinger.html
- www.folketinget.dk
- www.vfm.dk
- www.dst.dk

◇