Hvordan laver man en let (forståelig) opgave i matematik?

PETER LIMKILDE, Odsherreds Gymnasium

En gymnasiereform er en god anledning til at indføre nye traditioner i et fag. Matematikfaget kunne fortjene at have beskedne dumpeprocenter på niveau med andre gymnasiefag som fx dansk og samfundsfag. Det skulle gerne være sådan, at alle, der prøver, og som gør en indsats, har en mulighed for at bestå.

Det er ikke så nemt at vide, hvad der virker svært for eleverne og derfor er det ikke så ligetil at lave en let opgave i matematik. Man kommer let i den situation, at det bliver "alt eller intet" for eleverne.

Løsningen af en matematik opgave har fire dele, som hver tager deres tid:

1. At forstå, hvad opgaven går ud på
2. At finde en mulig fremgangsmåde til løsningen (opstille formler, løse ligninger etc.)
3. At foretage de nødvendige beregninger, løse ligninger etc.
4. At kontrollere, at metode og beregninger ikke har logiske fejl, tastefejl, mm.

CAS værktøjets betydning

Man kunne umiddelbart tro, at med anvendelsen af CAS-værktøjer vil eleverne let kunne regne mange flere opgaver på en given tid. Indførelsen af CAS værktøjer hjælper imidlertid slet ikke til at finde ud af, hvad opgaven går ud på, det hjælper næsten kun til at lette tidsforbruget ved beregninger og løsninger af ligninger (punkt 3). Det er derfor meget begrænset, hvor meget større opgavesættene kan laves efter reformen sammenlignet med tiden før anvendelsen af CAS.

Mange delspørgsmål er formuleret som dobbelt spørgsmål. I en statistikopgave med en tabel over cigaretforbruget blandt 531 rygere (opgave 11, MAT B, Maj 2009) spørges der fx i delopgave b):

> Bestem kvartilsættet for tabellens data, og bestem, hvor stor en procentdel af rygerne, der ryger mindst 21 cigaretter om dagen.

For en trænet matematiker er der måske her tale om at anvende den samme fremgangsmåde (aflæsning på en sumkurve) forlæns og baglæns. Men det er ikke givet, at alle eleverne kan se det med det samme. For en del af dem er det to selvstændige opgaver, der kræver alle 4 punkter ovenfor. Det er kun selve tegningen af sumkurven under punkt 3, der er sparet ved løsningen af den anden del af spørgsmålet.

Mit forslag er derfor at skære ned i antallet af delspørgsmål samlet set, og at tælle sammensatte spørgsmål (som i eksemplet ovenfor) som to delopgaver med 5 point til hver.

Opgavesættets matematiske abstraktionsniveau

Ifølge Piaget[1)] fører barnets udvikling til, at børn i alderen 7 - 12 år mestrer, hvad han kalder *konkrete operationer*, dvs. at gruppere tanker om ting, der findes i den fysiske verden omkring os, mens børn i alderen fra 11 år - voksen udvikler en evne til at udføre *formelle operationer*, dvs. at opbygge teorier med abstrakte begreber om noget, som (til dels) kun findes i en tankeverden, lege med forskellige hypotetiske antagelser og gennemtænke deres mulige følgevirkninger osv.

I en stor engelsk undersøgelse, hvor man testede 14.000 elever (45 skoler) i alderen 10-16 år, viste det sig overraskende, at kun et mindretal af eleverne selv i 16 års alderen mestrede *formel operationel tænkning* fuldt ud[2)].I 11 års alderen var andelen så lille som 5%. Det var altså ikke alle børn, som automatisk udviklede tænkekompetencer i samme takt som forudsagt af Piaget. Samtidig viste en analyse af sværhedsgraden af pensum i naturfag (science), at store dele af det forudsatte tænkning på et så højt niveau, at en del elever ikke ville kunne følge med. I matematik betyder det, at 70% af en ungdomsårgang kan beregne resultater i entydige (lukkede) regnestykker, men ikke løse åbne udsagn, dvs. de kan udregne $5 + 4 = x$, men de kan ikke regne baglæns og løse: $? - 7 = 7 - 3$ eller $? - 7 = 5 : 41$.

Selv om vi på de gymnasiale uddannelser formodentlig har den halvdel af en ungdomsårgang, der kan tænke mest abstrakt, vil det stadig være en stor andel (ca. 40% af vores elever), der ikke kan løse åbne udsagn, hvilket betyder, at det er vanskeligt for dem fx sætte at sætte 2 udenfor parentes i $(2x + 2)$.

I det lys vil jeg foreslå, at en stor del af opgaverne formuleres som opgaver, der kan løses ved direkte *forlæns* beregninger, at indsætte tal i formler etc. Et eksempel på en matematik niveau A opgave kunne være: Bestem integralet

$$\int(6x^2 + 2x)\,dx$$

Opgavesættets sproglige abstraktionsniveau

Kirsten Paludan[3] har i bogen *Videnskaben, Verden og Vi* beskæftiget sig blandt andet med det problem, at vi i naturvidenskabelige tekster har en tendens til at objektgøre sproget, således at de handlende væsener og udsagnsordene forsvinder eller bliver til navneord: I stedet for en sætning af typen: *Hunden bed postbudet i benet* bliver det til typen: *Postbudet fik et hundebid i benet*. Hermed bliver det sværere for de konkret tænkende elever at følge med.

Som eksempel kan vi se på opgave 16 i stx, Matematik Niveau A Maj 2009:

> Et vandbad opvarmes fra 20 °C til 100 °C. Den indre temperatur (målt i °C) i et bestemt objekt, der befinder sig i vandbadet under opvarmningen, er en funktion f af tiden t (målt i sekunder). Det oplyses, at f er en løsning til differentialligningen
>
> $$y' = 0{,}03 \cdot (g(t) - y)$$
>
> hvor $g(t)$ er vandbadets temperatur til tiden t. Endvidere oplyses det, at til tidspunktet $t = 0$ er objektets indre temperatur 10 °C, og at
>
> $$g(t) = 20 + 0{,}25 \cdot t,\ 0 \le t \le 320$$
>
> Bestem objektets indre temperatur, når vandbadets temperatur bliver 100 °C.

Denne opgave er både matematisk kompliceret og yderligere sprogligt formuleret uden handlende væsener. Jeg mener, at det er muligt at teste de samme matematiske færdigheder med en mere konkret formulering: Her er et udkast til en alternativ formulering:

> En husmoder vil koge gulerødder i en gryde med vand. Derfor kommer hun gulerødderne i vandet og varmer vandet i gryden gradvist op fra 20 °C til 100 °C.
> Vandets temperatur til tiden t målt i sekunder er givet ved funktionen
>
> $$v(t) = 20 + 0{,}25 \cdot t,\ 0 \le t \le 320$$
>
> Temperaturen inde i gulerødderne, målt i °C, er derimod en funktion f af tiden t målt i sekunder. Det oplyses, at f er en løsning til differentialligningen
>
> $$y' = 0{,}03 \cdot (v(t) - y)$$
>
> Endvidere oplyses det, at temperaturen inde i gulerødderne kun er 10 °C til at starte med dvs. til tidspunktet $t = 0$.
> Bestem temperaturen inde i gulerødderne, når vandets temperatur bliver 100 °C.

Med denne formulering kan opgaven matematisk set stadig bruges til at skille elever til karakteren 12 fra de andre til 10. Udover handlings udsagnsordene er det også ment som en hjælp, at funktionen for vandets temperatur har bogstavet v (vand).

Delprøven uden hjælpemidler

Det er min erfaring, at elever, der tænker konkret og dermed ikke har mulighed for at forstå hele baggrunden for de forskellige metoder til opgaveløsninger, ofte har den løsningsstrategi at kopiere gamle (rettede) opgavebesvarelser. Ved prøven uden hjælpemidler er de helt afskåret fra at anvende denne strategi, derfor mener jeg, det er særligt vigtigt, at prøven uden hjælpemidler har et stort antal opgaver, der kan løses ved direkte forlæns beregninger. Man kunne også overveje at beskære omfanget af prøven uden hjælpemidler fx til en halv time.

Konklusion

Alt i alt vil jeg foreslå, at den skriftlige prøve justeres med hensyn til det samlede antal delspørgsmål, det matematiske og sproglige abstraktionsniveau, og vægtningen mellem omfanget af prøvedelene med og uden hjælpemidler. ◊

---

1) Piaget. J. (2002), T*he Psychology of Intelligence*, Routlegde London and New York

2) Adey P. og Shayer M. (1997), *Really Raising Standards*, Routlegde London

3) Kirsten Paludan: *Videnskaben Verden og Vi*, Aarhus Universitetsforlag, 2000