

# Resultater af matematikundervisningen

KJELD GRAUDAL, Sorø Akademis Skole

Vi stræber alle efter, at eleverne skal opnå gode resultater af matematikundervisningen. For 28 år og længere tid siden var det rystende som lærer at opleve, at en elev i en klasse efter tre års anstrengelser stædigt brugte en generaliseret distributiv regel til udregning af kvadrater på og kvadratrødder af flerleddede størrelser. Det mildnede at høre en garvet censors humoristiske beretning om sine fund, man var desværre ikke ene om det. Nu er man glad, når ingen af de bedste elever i klassen i tankeløshed kommer til at bruge de gale regler. Selv om eleverne stadig er lige uforbederligt ungdommelige, er der sket en udvikling.

Selvfølgelig skal man se på forløb, hvor gode resultater er opnået, for at finde egnede metoder til det. Det er utrolig godt, at undervisningsministeriets fagkonsulent systematisk har taget det op i en undersøgelse af bemærkelsesværdigt gode resultater af matematikundervisningen i LMFK-bladet nr. 2 marts 2009 side 28-33, [www.lmfk.dk](http://www.lmfk.dk) efter konstatering af en øget spredning i eksamensresultater efter reformen, som indikerer øget uretfærdighed. Noget lignende burde reformatorerne have gjort før reformen. Bag undersøgelsens mange opmuntrende indberetninger ligger givetvis betydelige arbejdsindsatser. Det er der kommet konklusioner af med fremdragning af elementære grunde i seks punkter. Det er ærgerligt, at der ikke er observeret banebrydende nyt. Det er en lettelse, at der ikke er afsløret pinlige skyklapper. Grundene er nogen af de velkendte og fornuftige, man i årevis med de til rådighed stillede ressourcer har prøvet at bygge på. Det skal vi nu prøve at fortsætte med i et udspekuleret reformeret system, hvor det er let at forville sig.

Det er et bjergtagende, totalitært system for gymnasieundervisningen med en blanding af forherligede, gamle filosofiske ideologiske grunde, moderne administrative og teoretisk pædagogiske formuleringer og matematisk-naturvidenskabelige elementer udformet i en terminologi, der umiddelbart kan overføres til undervisnings-

modeller i de humanistiske og samfundsfaglige fakulteter. Undervisningsmodeller i det matematisk-naturvidenskabelige fakultet har allerede opfyldt reelle dele af systemet i århundreder, men med brug af jævne ord for begreberne, og det er næppe fint nok for systemideologerne; det virtuelle, man kan få frem på papiret, kniber det med. En betydelig forskel mellem modellerne er, at i nogle spiller det øverste metafysiske niveau i Aristoteles tretrinsklassificering af videnskab, overført til toppen i Blooms militaristiske taksonomi, stadig en rolle, i fysik er det forkastet efter Galilei. Derfor fremlægges her nogle mulige forvildelser, i håb om at de kan undgås.

## Hartad håbløst at planlægge

Formuleringen i første punkt, om planlægning af hele forløbet og af den enkelte lektion, kan reformens bagmænd synes uenige i. De har gjort det meget vanskeligere, hartad håbløst, at planlægge. Reglerne udformes løbende med en byge af næsten uafprøvede ændringer, hvorved omfattende, detaljerede planlægningsarbejder og materialer spildes, og man må klare sig med stressende forberedelse til dagen og vejen og hurtigt tilpassede materialer i stedet for betryggende langtidsplanlægning og gennemarbejdede materialer. Reglerne skrives med brug af uklart definerede eller flertydige begreber og ord tillagt nye og usædvanlige betydninger, desværre uden indhold af ny viden og dokumenteret påviseligt større metodisk effektivitet.

Det er mærkværdigt, at bagmændene organiserede kurser i deres udlægning af reformen, allerede før den var endeligt udformet og vedtaget. Det må være magtens korrumpierende virkning, der får dem til at synes, at de selv kan tillade sig at gøre noget løbende, men at menige lærere ikke kan tillade sig at inddrage historien, kulturen, praktiske sager, kompetencer og fagets struktur integreret på relevante steder, at de vil have at det skal gøres i afstumpede blokforløb, særligt gerne med sager og temaer der ikke er matematiske, på trods af at det ikke er en tvingende logisk konsekvens af de bogstavelige regler. Der

kan laves langvarige sammenvævede forløb og kortvarige enkeltsagsforløb, hvad der virker bedst for en behøver ikke at virke for en anden, lad der være frihed.

For eksempel kan plan for arbejde med området, emnet, sagen og temaet forurening indskudt i et projekt eller en opgave; med minimering af spild, indretning af beholdere og risikovurderinger kan elementer fra hele kernestoffet og supplerende stof behandles; der må bruges litteratur om sagen og spredt matematisk støttelitteratur fra diverse undervisningsmaterialer; eleverne bliver utroligt motiverede til at træne elementære færdigheder, som de ellers ikke gider; det er fantastisk godt at noget sådant kan præsteres, og det skal der selvfølgelig være frihed til for dem, der synes, at de har forudsætninger til det; der må dertil laves bogholderi for at kernestoffet og kompetencerne dækkes, ellers risikeres utilsigtede bidrag til resultatspredningen.

For eksempel har emnet og området sandsynlighedsregning stadig sit tema, et planlagt undervisningsforløb i det er et projekt, formuleres til indledning et problem er det en opgave, og tilsvarende gælder geometri, algebra og analyse; en velvalgt klassisk lærebog gør fyldest som en god rapport, det ville tage lang tid at skrive, og der er typisk fremragende eksempler på samarbejde med andre fag, historisk og kulturel sammenhæng og velegnet arbejdsstof til eleverne. Tilgængeligheden af gode materialer frigør lærerkræfter til at være elevernes nærværende støtte under forløbet. Hele matematikundervisningen har i årevis bestået i sådanne projektførløb. Selv Euklids elementer er et projekt, men embedsmændene kan jo nytænke ordenes betydning og diktere, det er ikke et tema, det er ikke et projekt, det er ikke en opgave, det er ikke en rapport, det er ikke tværfagligt eller flerfagligt samarbejde, vi mener noget andet, og gøre metoden utilledelig.

Helheden, matematisk tankegang, er i reformen atomiseret til en sky af kompetencer omkring et såkaldt kernestof i et uåbent og ubestemt pensum, hvor pensum tidligere defineredes ved en mere detaljeret og dækkende kernestofsbegrebsliste, en skriftlig opgavetradition og en mundtlig fremstil-

lingstradition som eleverne skulle erhverve sig kompetence til at leve op til, og det har i tidens løb virket særdeles fint for mange ingeniører, videnskabsmænd og administratorer.

### **Kernestofsbegrebsliste ønskes**

Ifølge mindst en af bagmændene vil man, hvis man spørger en samfundsfaglig om betydningen af matematik, få et bedre svar, end hvis man spørger en mat-fysser, og derunder haver vi os underdanigst at rette. Det ville være rart hvis de teoretikere og administratorer, der hylder kompetence- og målstyring som et paradigmeskift fra pensum- og kernestofstyring, underforstået at kompetencerne af uvidende undervisere ikke udfoldedes med pensumstyringen, ville vise større hensyntagen til, at kompetencerne som helhed af nogle lærere og elever, måske ikke så få endda, udvikles effektivere ved arbejde med et gennemtænkt konkret pensum end ved knytning af delkompetencer til spontant valgte sager. Med det sidste sker flere uheld, som formodentlig forplanter sig til større spredning i eksamensresultaterne.

Det ville være en god hjælp at få udarbejdet en detaljeret kernestofsbegrebsliste med alle de til opfyldelse af målene nødvendige ord og en præcis kompetenceliste samt ægte frihed til at supplere. Kompetencerne er og har altid været det væsentlige i matematikundervisningen, dem har lærerne naturligt fået i spil sammen med kernebegreberne, og de har nu formentlig fået det praktisk taget bedst mulige ud af de givne reformerede læreplaner; problemet er, at matematikernes pædagogiske evner ikke rækker til at gøre det begribeligt for nogle toneangivende reformadministratorer og eksperter fra EVA og internationale grupper med spørgeskemaer, der gerne vil have styr på det, men det er ikke nødvendigvis på grund af lærernes tungnemhed, som det karakteriserende antydes at flere kostbare kurser eventuelt kan afrette; en konkret liste kan forhåbentlig hjælpe.

Reformatorerne har åbenbart ikke haft held til at udforme læreplanerne til målgruppen, så målgruppen kan tilfredsstille dem. Det ville være rart og berigende, hvis læreplanerne udformedes og

administreredes rummelige nok til at respektere såvel tilhængere af nymodens strømninger som brugere af klassiske metoder, så de på hver deres måde kunne stræbe efter gode resultater uden frygt for tvang fra de andre. Der foregår et sammenstød mellem en perfektionistisk ideologisk systemkultur og en tilgivende kærlig frihedskultur. Man må håbe, at læreplanerne med sproglig, udtrykkelig forståeliggjort helhedssammenhæng kan tages helt bogstaveligt, ligesom velformulerede matematiske sætninger og opgavebesvarelser, uden studier efter utydelige hensigter i ikke kildeangivne forarbejder og omfattende kommenterede udlægninger, uden at man skal hænges ud for det.

Reformatorene har viseligt søgt at indskrænke undervisningsmetodefriheden. Det indskrænker muligheden for frit ved planlægningen at tilpasse forløb til lærerens og elevernes formåen, og det forplanter sig formodentlig til større resultatspredning, men administrativ kontrol og styring lettes.

### Sisyfosarbejde

Formuleringen i andet punkt, at der skal gøres en indsats for at skabe interesse for faget gennem spændende matematiske emner, kan bibringe ind-

tryk af at man skal finde noget utraditionelt supplerende stof – som om det traditionelle pensum ikke er spændende.

Hvis dette er holdningen, man signalerer til eleverne, er grundlaget for de gode resultater fra starten undermineret, akkurat som pep med illustrationer med vitser, smukke piger og pæne drenge til dækning og appetitvækning for svært stof let gennemskues, i heldigste fald virker med selvironi. Det fantastisk spændende er især hvor meget, man kan udrette med det traditionelle pensum, og det er vel også derfor, at det i sin tid valgtes i stedet for andre mere perifere og eksotiske emner. Det er de traditionelle emner, der skal gøres spændende; det er tidligere typisk sket med motiverende udfordringer i opgaver. Dem er der skåret ned på til fordel for almen studieforberedelsesopgaver og lærernes efteruddannelseskonto. Det ligner et Sisyfosarbejde at skubbe de motiverende udfordringer over i atsopgaver, men det kan måske overkommes ved at efterabe paradigmatisk eksempler fra kurser.

Den største hindring for vellykket samarbejde med andre fag er og bliver de andre fags manglende ressourcer til at ofre den fornødne tid til at erhverve tilstrækkelig forståelse af matematikken, de må typisk håbe på en kongevej. Ideens

fortræffelighed vil ses på antallet af elever, der vælger matematik til atseksamen.

Ved behandling af et emne eller noget stof eller et pensum eller nogle færdigheder får eleverne bedre kompetence i det, når behandlingen sker i passende portioner over længere tid, end når det behandles samlet i løbet af kort tid. Derfor er der ikke uden tvingende grunde fornuft i sammenpressede atsførelser og andre turbokurser. Administrativt er det dog lettere at styre koncentrerede forløb.

### Samarbejde med andre fag

Formuleringen i andet punkt, at der skal gøres en indsats for at skabe interesse for faget via et samarbejde med andre fag, kan bibringe indtryk af, at der ikke kan skabes tilstrækkelig interesse ved isoleret arbejde i faget. Et sådant indtryk er vist forkert. Blandt andet i emnet statistik indrages i matematikseksamensopgaver andre fags stof med skjulte variable særdeles kontant i samarbejde. Problemet med samarbejde er typisk, at der slås så store brød op, at de kun kan bages ved at følge en kagebogsopskrift uden egentlig matematisk tankegang med en utrolig kongevej til resultater, og at tilrettelægningen kræver urimelig arbejdstid bortset fra anvendelser i fysik; i bemærkelsesværdige tilfælde lykkes det dog.

Der har altid været synergi med fysik, men elevsøgningen til fysik tyder ikke på at interesse generelt skabes via samarbejde. Når elever i matematik stiller spørgsmålet: "Hvad kan det bruges til?" er det paradoksalt typisk ikke samarbejde de ønsker, men frihed for mere matematik. De ved godt, at det anvendes gennemgribende i fag, erhverv og samfund, og de får det yderligere ud-

penslet i almen studieforberedelse, hvor konsekvenserne ses.

Formuleringen i tredje punkt om arbejdet med den mundtlige dimension, med at få eleverne til at argumentere, er blot en konstatering af klassisk, gængs praksis.

### Eksperimenterende tilgang

Formuleringen i fjerde punkt, at der skal være elevaktiverende tilrettelægning med opgaver, har altid til overmål for de fleste elever været opfyldt med et bredt spektrum af forskellige typer i oplæg, træning, øvelser, stykker, gåder, morsomme, anderledes, svære, eksperimenter, prøver, anvendelser, videreførende, små og større projekter hjemmeopgaver, blækregning og hvad de ellers kaldes.

Formuleringen i fjerde punkt, at der skal være tilrettelæggelse af undervisningen med eksperimenterende tilgang, kan bibringe indtryk af at eleverne skal eksperimentere sig frem til matematiske sætninger og gode begreber. Det findes der ikke tid til. Eleverne skal selvfølgelig gøre erfaringer med et passende udvalg af begreber og størrelser, som de også tidligere har gjort i en vifte af induktive oplæg, øvelser, opgaver og overkommelige, med succes ladede projekter, der med moderniseret terminologi kaldes eksperimenterende tilgang. Indskrænkningen af eksplicit nævnte kernestofsbegreber for at skaffe tid til eksperimenter og mere induktiv undervisning er paradoksalt sket ved fjernelse af nyttige logiske og funktionelle redskaber til eksperimenterne samt forståelse for brug af it og amputering af geometriske og algebraiske rødder til inspiration og færdighed; de må i fornødent omfang

samles op ad hoc, nogle fjernede ord optræder alligevel i vejledninger og eksamensopgaver, og alle de fjernede begreber ligger til overflod implicit i målene for undervisningen; helbredelse af skaderne varer længere end reduktionen, selv med de mest afsindigt spændende forureningsprojekter.

## Rapporter

Formuleringen i fjerde punkt, at der skal ske en sammenfatning af de matematiske emner i rapporter, kan bibringe indtryk af, at eleverne skal skrive rapporter med sammenstyknings af bearbejdning og afskrift af notater og bøger, der bare kan dækkes af et par litteraturhenvisninger. Dette kan man få veldresserede elevtyper til, men rapporterne er erfaringsmæssigt præget af betydelige fejl, mangler og notationsforvirring sammenlignet med sammenfatningerne i de benyttede formelsamlinger og lærebøger, og det opøver kun kompetence i at referere på bekostning af problemløsningskompetence. Forsøg på at få vilde drenge til det er som at slå vand på en gås. Elever, der kan løse problemer, men ikke giver en sammenhængende og detaljeret redegørelse for løsningen, er på et andet niveau end elever, der løser en mindre del af problemerne, men dog rapporterer mere udførligt om det udførte arbejde med stoffet i hele Blooms register.

Ved at arbejde med passende problemstillinger og give skriftlig redegørelse for arbejdet kan matematiske emner dækkes sammenfattende på en spændende, udfordrende og mere givende måde, der passer bedre til opnåelse af kompetence i faget end rapportering i snæver forstand, især for den elevgruppe der videregående skal sætse på matematisk indhold i uddannelse og arbejde. Opgavetraditionen i matematik fungerer langt bedre end udefra påtvungne regelbundne projektarbejdsformer.

I øvrigt er opgavebesvarelser simpelt hen matematiske rapporter skrevet til en meget præcist defineret målgruppe, og det kan synes spild af tid at udforme dem til bredere målgrupper, der ikke vil interessere sig for dem.

Reformmæssigt må det vel endelig være fint at læreren tilrettelægger rapporterne, ligesom stu-

dierrapporten i almen studieforbereelsespraksis.

Midt i rapporteuforien er det ikke tydeligt, hvordan der er taget hensyn til alle de gode grunde for at afskaffe rapportkravet til fysikeksamen for nogle år siden.

Ifølge læreplanerne skal studentereksamensundervisningsforløb afsluttes med udarbejdelse af skriftlige produkter, på hf skal mindst et afsluttes med rapport, og eventuelle rapporter opgives til eksamen efter c-eksamensformen, angiveligt uden ekstraarbejde i forhold til planlagte forløb til den snart afskaffede traditionelle a-form, der vel ligger indlejret som en mulig praksis sammen med b-formen med rapporteksamination i den mere fleksible c-form. Hvis de skriftlige produkter skal opgives som rapporter fås et stort ekstraarbejde. En elev, der skal støtte sig til en sløj nybegynderrapport, stilles dårligere end en, der skal støtte sig til en mere kompetent udført rapport.

På hold med elever fra forskellige grundforløb, studieretninger eller tilflyttere vil rapporterne uundgåeligt kræve betydeligt ekstraarbejde, som kan gå ud over faglig forberedelse til fælles gavn eller eksamensretfærdigheden. Sondringen mellem skriftlige produkter og rapporter defineres ikke, og embedsmændene får magt til ved bindende standardfortolkninger at fratage holdene og deres lærer friheden til at planlægge efter behov. Af hensyn til elevernes retssikkerhed og friheden er det forhåbentlig sådan, at de skriftlige produkter, der i den fælles planlægning af undervisningen udtrykkeligt kaldes rapporter, er eksamenspensum, og udarbejdelse af de øvrige skriftlige produkter blot er kompetenceudviklende aktivitet.

## Krav til en god opgavebesvarelse

Formuleringen i femte punkt, om it og krav til en god opgavebesvarelse, rejser nogle spørgsmål.

Howdan bedømmes benyttelse af skrivemåder fra værktøjer, der af tekniske grunde går på kompromis med god matematisk notation, ordentligt sprog og gængs skrivemåde? Anvendelse af forkvaklede it-notationer ved siden af de rigtige letter i hvert fald ikke tilegnelsen af matematik. Er

det rimeligt at elevers sproglige svagheder, der bedømmes i dansk, trækker ned en ekstra gang i matematik, når de har svaret med udregninger og resultater uden sproglig udtrykkelig forståelse-liggjort helhedssammenhæng?

Anvendelse af CAS uden redegørelse for eksistens, entydighed og fuldstændighed er typisk operationel på samme taksonomiske niveau som opslag i en ordbog eller leksikon og afskrift af opslaget, hvor en lille fejl i begyndelsen af opslaget gør resten værdiløst, og tilfældigheder får alvorligere konsekvenser med større spredning i resultaterne. En elev med en systematisk samling gode eksempler med CAS til hver eksamensopgavetype på sin computer kan oplagt præstere mere i en fart end en elev, der skriver og regner selv, så uensartet rådighed over computere med CAS giver formodentlig større spredning.

CASser forgår, matematikken består. Nye CASser kræver ekstra tid, og den leverer matematiklærerne frivilligt. Det ville være rart ikke at skulle skifte så tit.

Formuleringen i sjette punkt, om mange afleveringer og drypvis indlæring, synes gymnasie-reformens bagmænd ikke enige i.

Aflevering er skåret ned fra almindelig ugentlig praksis til et minimum, der udmarvende evindeligt, lokalt skal kæmpes for med mange uundgåelige og alt for lange afbrydelser og opsamlinger i, især for svage elever, ufordøjelige klumper. Nedsikring ses også på skriftlig eksamens varighed, hvorved tilfældigheder får større indflydelse med større spredning i resultaterne. I samme retning trækker ændringen til et større antal usammenhængende opgaver med færre delspørgsmål, der tilsyneladende også, med gode intentioner om at eleverne skal have rimelige karakterer, indebærer en glidning fra opgaver med projektkarakter til paratvidensopgaver trods indførelse af alle hjælpemidler.

Kernestofsbegreberne vil selvindlysende uundgåeligt komme drypvis, så det må være kompetencedryp, der tænkes på. Før reformen kom dryppene ved enhver hensigtsmæssig lejlighed. Efter reformen skal der i de enkelte forløb lægges særlig vægt på udvalgte kompetencer; der

er altså tale om koncentration i undervisning, helt modsat drypvis læring. Dårligdommen kan eventuelt symptombehandles ved at planlægge tilpas langvarige forløb, hvori flere delkompetencer spiller sammen i en større helhed.

Endelig er der for undersøgelsen nogle skjulte variable, elevernes matematiske talent, elevernes koncentrationsevne og elevernes arbejdsvillighed. De sidste påvirkes af stærke faktorer uden for matematiktimerne, som de teoretiserende pædagoger og undervisningspsykologer i pædagogikum mangler at give os værktøjer til at håndtere bedre. De kunne især hjælpe os med at give fagligt interesserede og talentfulde elever position til at sætte dagsordenen i klasserne fra første færd. I bemærkelsesværdige tilfælde lykkes det, som undersøgelsen viser, men hvorfor?

Dertil skal man have en kontrolgruppe, og det er selvfølgelig de lærere, der ikke er spurgt. Hvis de blev spurgt, ville der ganske vist komme hundrede beretninger fra dem, der ville vise, at de med de til rådighed stillede ressourcer har gjort ligesom de spurgte, men desværre uden lige så bemærkelsesværdige resultater. Det er næppe ulejligheden værd at spørge.

### En skræmmende god historie

Gymnasiereformen er et velment, blændende, totalitært system til aflivning af fantomer fra en postuleret sortere skole, der tilfældigvis også giver myndighederne bedre styringsmuligheder og besparelsesmuligheder. Det er en skræmmende god historie, at det så let har fået tag i et frit samfunds administration med øget bureaukrati, kontrol og eksamensinfciering med ats- og studieretningsopgaver, nv- og ap-prøver en masse. Vi skal leve lykkeligt under dens vise herskere, men det er lidt kedeligt for ofrene for resultat-spredningen.

Vi skal bøde på reformens skavanker ved at præstere et ekstraarbejde med førreformatoriske metoder, for den kan jo ikke selv, der er fejl i kromosomerne. Reformen skulle få studieivrige og kompetente studenter til at myldre frem; spørg de videregående uddannelser hvor mange, der kom. ◇