Dynamiske ovaler og ellipser

Mogens Thorborg, Sankt Annæ Gymnasium

I januarnummeret af LMFK bladet beskrev Ole Witt-Hansen, hvorledes man kan konstruere ovaler med passer og lineal. Her anviser Mogens Thorborg, hvorledes programmet Geometer kan anvendes til samme formål.

Gamle og nye dyder

Inden for mange områder af vores tilværelse støder vi ofte på vendingen "De gode gamle dage", og det skal som hovedregel ses som en længsel efter en svunden tid, hvor problemerne i vores tilværelser var mere overskuelige og vores roller mere veldefinerede.

At skrue tiden tilbage i matematikundervisningen til disse "Gode gamle dage", hvor vi kæmpede med sofistikerede integralsubstitutioner og logaritmetabeller, er selvfølgelig absurd. Vi og vores elever skal lære at leve med og udnytte alle de videnskabelige landvindinger af såvel teoretisk som teknisk art.

Det er samtidig åbenbart, at det ikke derved bliver lettere at være gymnasieelev i de kommende år, og det bliver navnlig slet ikke lettere at være gymnasiematematiklærer. Vi og vores elever skulle jo gerne bevæge os ud over det stadium, hvor f.eks. en simpel renteformelligning løses med solve-faciliteten og dernæst kritikløst afleveres med 1 reel og 15 komplekse løsninger. Hvis de nye hjælpemidler kun benyttes til at lave minimalistiske løsninger af opgavetyper, som eleverne også kunne løse med lidt mere besvær i "De gode gamle dage", så bliver situationen for alvor absurd. Fremtidens dygtige matematiklærer i gymnasiet skal således være velbevandret i både de gamle og de nye dyder.

En af de gode, gamle dyder er konstruktion med passer og lineal, som Ole Witt-Hansen omtalte i "Geometriske konstruktioner: Ovaler og det gyldne snit." i januarnummeret, og denne hæderkronede disciplin kan dyrkes i nye rammer i programmet GeoMeter. Bjørn Felsager har skrevet nogle glimrende bøger om programmet, som jeg hermed giver mine varmeste anbefalinger.

Dynamiske ovaler

Jeg vil nu gennemgå en køreplan for, hvordan 2 koncentriske og dynamiske ovaler kan konstrueres i GeoMeter. At de er dynamiske, betyder, at såvel størrelse som form kan ændres ved at forskyde 4 flytbare punkter.

1.1: Afsæt to flytbare punkter C_1 og C_2 på henholdsvis x-aksens og y-aksens positive del.

1.2: Spejl C_1 i y-aksen til C_3. Spejl C_2 i *x*-aksen til C_4.

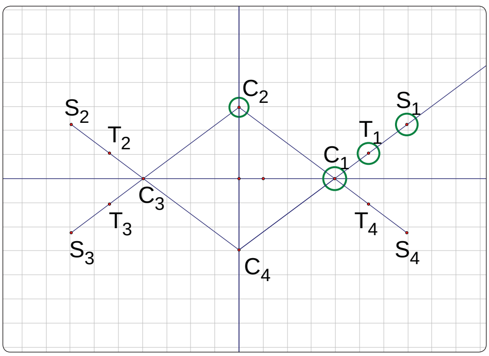
1.3: Konstruer en halvlinie fra C_4 gennem C_1.

1.4: Afsæt to flytbare punkter S_1 og T_1 på halvlinien i 1.kvadrant.

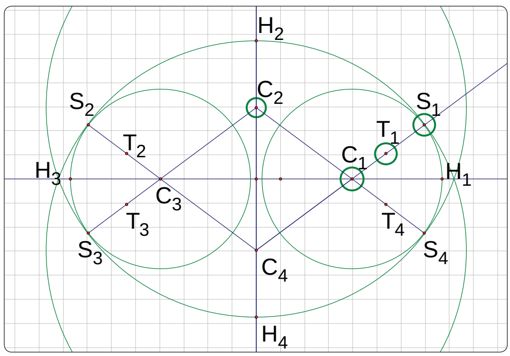
1.5: Spejl S_1 og T_1 i både y-aksen og x-aksen til punkterne S_2, T_2, S_3, T_3, S_4, T_4.

1.6: Konstruer liniestykkerne på fig.1

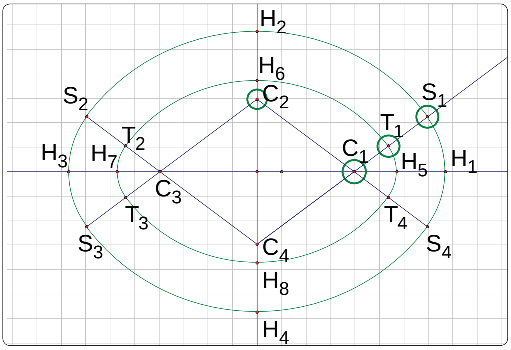
2.1: Konstruer de 4 cirkler med centre i *C*-punkterne og gennem *S*-punkterne som vist på fig.2.



Figur 1.



Figur 2.



Figur 3.

2.2: Opsøg og afsæt de 4 skæringspunkter H_1, H_2, H_3, H_4 mellem de 4 cirkler og koordinatsystemets akser.

3.1: Skjul hver af de 4 cirkler og erstat hele cirklen med en cirkelbue gennem de samme 3 punkter.

3.2: Gentag 2.1, 2.2 og 3.1 med T-punkterne, således at fig. 3 fremkommer.

De to koncentriske ovalers form kan nu ændres ved at flytte på et eller begge punkterne C_1 og C_2, der danner den grundlæggende rhombe.

Størrelserne af de to ovaler kan ændres ved at flytte på de to punkter S_1 og T_1 på halvlinien. Bemærk i øvrigt, hvad der sker, hvis et eller begge disse punkter flyttes ned i 4.kvadrant mellem C_1 og C_4.

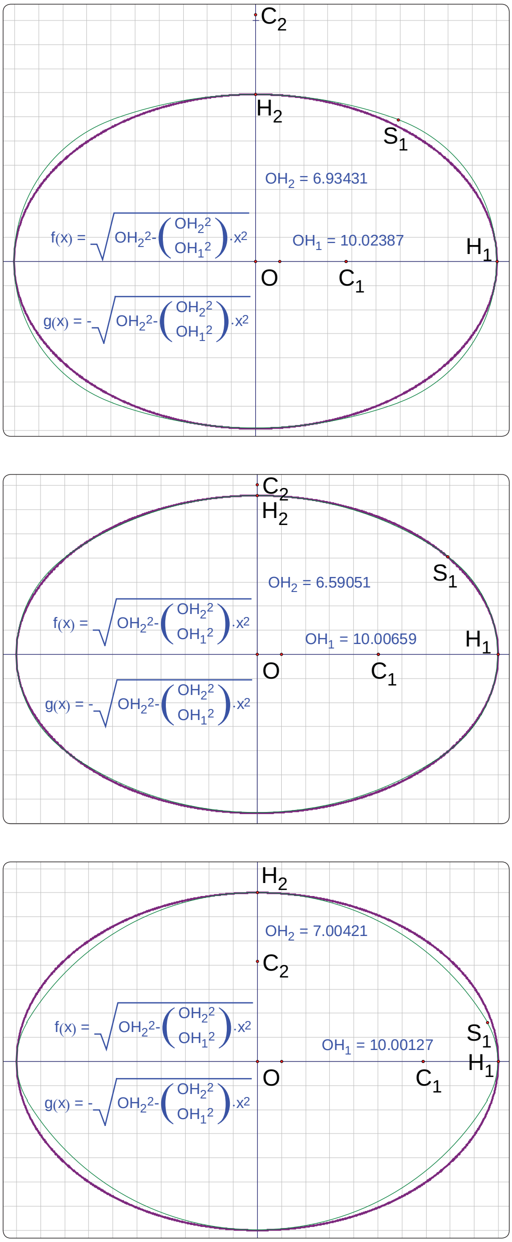
Ovaler og ellipser

I sin artikel bemærkede Ole Witt-Hansen også, at det er meget vanskeligt med det blotte øje at kende en oval fra en ellipse. Det vil jeg nu se lidt nærmere på.

På figur 3 skjuler vi nu den ene oval og alle streger og punkter bortset fra de 3 punkter, som vi skal benytte til at styre ovalens form og størrelse: C_1, C_2 og S_1 og bortset fra punkterne H_1 og H_2, som vi skal benytte til måling af akserne.

Koordinatsystemets begyndelsespunkt giver vi navnet O. Vi skal nu have konstrueret og tegnet en ellipse med de samme to akser som ovalen. Vi starter derfor med at måle koordinatafstandene: OH_1 og OH_2. Ved at isolere y i ellipsens ligning:

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1 \Leftrightarrow y=\pm\sqrt{b^2-\frac{b^2}{a^2}\cdot x^2}$$



Figur 4, 5 og 6.

kan vi tegne ellipsen som graferne for de to funktioner.

Resultatet er vist på figurerne 4, 5 og 6, hvor den fede kurve er ellipsen og den tynde ovalen:

- På figur 4 ligger ovalen yderst.
- På figur 5 krydser oval og ellipse hinanden, og de er næsten sammenfaldende.
- På figur 6 ligger ovalen inderst. ◊