

# Matematik efter reformen – evaluering og justering

BJØRN GRØN, fagkonsulent i matematik

2009 er evalueringens år for gymnasireformen. Der kommer et væld af rapporter, også en om matematik A, og der afholdes mange konferencer. Alt sammen med sigte på at diskutere justeringer af bekendtgørelse og læreplaner.

I matematik afholdes tre regionale konferencer: 22. april i Odense, 23. april i København og 25. april i Århus. Konferencerne er omtalt andetsteds i bladet, og programmet vil kunne findes på emu'en.

## Hvad var intentionerne med reformen – især mht. matematik?

1. Matematik i stx og hf skulle være et fag for alle, et fag alle elever har glæde af og som bidrager til, at de unge kan fungere som demokratiske medborgere, der bedre kan gennemskue sammenhænge og ikke så let lader sig forføre. Matematik og naturvidenskab skulle samtidig placeres stærkere i gymnasiets almindelige projekt.

2. Interessen for matematik og naturvidenskab skulle stimuleres, så flere fik lyst til at læse videre og tage længerevarende eller mellemlange uddannelser, hvor der anvendes matematik. Dette skulle ske ved at give bedre plads til, at de enkelte hold kunne fordybe sig i spændende emner efter eget valg, og ved at fremme det faglige samarbejde i studieretningerne. Og den tidsmæssige ramme herfor skulle tilvejebringes ved at erstatte den snævre og meget detaljerede pensumstyring med en styring via faglige mål, der udmøntes i et fælles kernestof samt et – af holdet fastlagt – supplerende stof.

3. Matematiske værktøjsprogrammer og it i almindelighed skulle inddrages i stor udstrækning i undervisningen, både med henblik på opgaveløsning (ved de skriftlige prøver og ved behandling af mere komplekse problemer) og som didaktiske hjælpemidler til at styrke begrebsdannelsen. Det sidste gælder hele spektret – talbe-

grebet, geometrisk forestillingsevne, funktionsbegrebet, statistiske begreber som signifikans og konfidens, matematisk modellering, visualisering af løsninger til differentiaalligninger.

4. Arbejdsformerne skulle være mere elevaktiverende med tilrettelæggelse af forløb med eksperimenterende tilgang til dele af matematikken og med betydelig anvendelse af projektarbejdsformer eller andre former, hvor eleverne arbejder selvstændigt med større temaer.

5. Moduleringen skulle erstattes af, at alle niveauer blev beskrevet fra 0 til niveauet. Hvert af de tre niveauer, C og B i hf og C, B og A i stx skulle have en klar profil. Sagt meget bredt: C-niveauerne har et almindelig sigte, B-niveauerne har stor vægt på det anvendelsesorienterede og peger især mod mellemlange uddannelser eller uddannelser hvor matematik er et redskabsfag på et forholdsvis elementært niveau, mens A-niveau har større vægt på matematisk teori samt anvendelse af matematik på mere komplekse problemer og især peger frem mod matematikholdige videregående uddannelser.

## 2009: problemer – justeringer og initiativer

På regionalmøder i efteråret og på møder i fagligt forum<sup>1</sup> er reformens første gennemløb blevet drøftet. De hidtidige evalueringer er blevet inddraget, og det har resulteret i en række foreløbige forslag til justeringer af læreplaner og andre initiativer.

1. *Matematik er blevet et fag for alle*, ikke blot i kraft af det formelle at alle skal have mindst matematik C, men C-niveauerne er velfungerende. Stadig har vi dog både på C og på B et problem med at få “alle med”, forstået som: alle der prøver og som gør en indsats. Dumpeprocenterne er

<sup>1</sup> Fagligt forum i matematik består af Marianne Kesselhahn (Egedal gymnasium og formand for matematiklærerforeningen), Morten Overgaard Nielsen (Københavns VUC), Lisbeth Fajstrup (Institut for matematiske fag, Ålborg), Niels Grøn-bæk (Matematisk Institut, KU) samt Bjørn Grøn (fagkonsulent).

faldet på hf C de senere år, men stadig forekommer dumpeprocenterne både her og på B-niveau at være betænkeligt høje sammenlignet med andre fag. Der bør ikke være en modsætning mellem at have en forholdsvis lav indgangstærskel til faget og samtidig have høje faglige krav til at nå de gode karakterer. Disse spørgsmål diskuteres løbende i opgavekommissionerne.

2. *Arbejdspresset på løfteholdene fra C til B er stort*, mens det på C-niveau er til at overkomme. På hf er B-niveau stort set altid et løftehold. At flytte stof fra B-niveau til C-niveau fjerner det jo ikke fra den samlede stofmængde, man skal nå på B, men det kan alligevel give et lidt mindre presset B-forløb. På løfteholdene skal man ved siden af arbejdet med det faglige stof også inddrage og gøre eleverne fortrolige med et CAS-værktøj. På denne baggrund foreslås følgende justering af læreplanerne for C-niveauerne:

- *Trigonometriske beregninger i "de skævvinklede trekanter"* inddrages i kernestoffet på C-niveau. I vejledningen vil det blive understreget, at man forventer eleverne møder beviser for sinus- og cosinus-relationerne, men dog ikke nødvendigvis i det stumpvinklede tilfælde. Der vil ikke blive stillet krav om, at man på C-niveau beskæftiger sig med enhedscirklen. Når man på B-niveauet repeterer trigonometrien skal man således også have fat i det matematiske ræsonnement bag udvidelsen af definitionsmængden for de trigonometriske funktioner.

Samtidig skal der ske en reduktion af omfanget af supplerende stof, jf. punkt 4.

*Af læreplanen for C-niveau fremgår, at eleverne skal præsenteres for og arbejde med regression.* Det praktiseres forskelligt, mange steder ved anvendelse af regneark, men det er vigtigt at der på den enkelte skole fastlægges en kurs, så de elever, der opgraderer til B kommer med en viden om og færdigheder i arbejdet med regression. Det er et område, hvor det ville være oplagt på C-niveau at lave forløb med undervisningsdifferentiering. Regressionsfaciliteterne er desværre endnu ikke implementeret på de små lommeregner, som vi på C-niveau kan kræve

eleverne har, og vi kan heller ikke endnu kræve, at de har pc-adgang ved eksamen. Derfor kan vi endnu ikke tage emnet med ind i de skriftlige opgaver på hf C.

3. *Afskaffelse af pensumstyringen* er ikke gjort med afskaffelse af pensumindberetningerne og opdelingen af stoffet i kernestof og supplerende stof. Pensumstyring og pensumindberetning har faktisk ikke noget med hinanden at gøre – og jeg hører til dem, der beklager, at vi ikke længere har denne gennemlysning af, hvad der foregår.

Den stikprøvevise evaluering vi har fra EVA tyder sammen med indberetningen fra de mundtlige censorer på, at omkring 30% af lærerne i ret beskeden udstrækning arbejder med supplerende stof, og at pensumstyringen her blot er erstattet af lærebogsstyring. De mundtlige censorer skal bl.a. påse, at læreplaner opfyldes – dvs. der er mundtlige spørgsmål, som dækker både faglige mål, kernestof og supplerende stof. Men det er nok sin sag at træde i karakter over for lærer og skole, hvis det ikke er meget grelt – der er kollegiale og psykologiske barrierer, og tingene skal jo køre – så der bør være et stærkere element, hvor ministeriet træder i karakter. Det kan fx ske ved at udnytte bekendtgørelsens muligheder for at indhente undervisningsbeskrivelser.

4. Samtidig skal der også lyttes, når kolleger siger, at det supplerende stof er for stort. Vanskeligheder ved at nå det hele ordentligt har ført til, at nogle kolleger tolker det således, at hver gang man i undervisningen arbejder med noget, der ikke udtrykkelig er nævnt i kernestoffet, så er det supplerende stof. Og der er jo rigtig meget, der ikke er nævnt eksplicit – hvert lille delemne indeholder eksempelvis altid et vist element af matematisk ræsonnement. Der står ikke eksplicit omtalt i kernestoffet, at man udleder formlen for hældningskoefficienten, for fremskrivningsfaktoren eller for fordoblingskonstanten. Det gjorde der heller ikke før reformen, og det betød naturligvis ikke, at når man så gennemførte disse ræsonnementer, så havde man dækket lidt af aspektet om matematikkens indre struktur. Det var der også lærere dengang der mente, og i pensumindberet-

ningerne hed det, at “aspekterne var tilgodeset løbende”. Det var stik imod hensigten fra fædrene til den tids læreplaner – og den tolkning er stadig forkert.

Man skal kunne nå det supplerende stof, og man skal kunne nå det ordentligt. Derfor foreslås følgende justeringer af læreplanen:

- *Omfanget af det supplerende stof* ændres fra  $\frac{1}{3}$  af undervisningstiden (25% på hf B) til at omfatte 25 timer på C-niveau, 50 timer på B-niveau og 75 timer på A-niveau.
- Beskrivelsen af det supplerende stof ændres, så der bliver større frihed i udvælgelsen af stof.
- Hvor der er gennemgående emner på C, B og A anvendes samme formuleringer, for at lægge op til at man normalt tager forløb med sig fra det ene til det andet niveau.
- Det bliver understreget i beskrivelsen, at der er tale om sammenhængende forløb og ikke en rodekasse af små stumper om dit og dat.

5. *Arbejdet med statistik* skulle opgraderes efter reformen, både i lyset af den omfattende anvendelse af statistik, vi ser i det moderne samfund, og fordi der her er oplagte samarbejds muligheder med andre fag. Emnet blev hovedsageligt placeret i det supplerende stof. Hensigten var, at de forskellige studieretninger skulle have størst mulig frihed til at vælge relevante statistiske emner. Det fælles stof kom derfor alene til at bestå af den deskriptive statistik samt af en indledende undervisning i stikprøver og repræsentativitet.

Erfaringerne fra de skriftlige prøver er, at vi savner en forbindelse mellem de kvalitative betragtninger og noget egentligt statistisk beregningsarbejde. Erfaringerne fra studieretningssamarbejdet med især samfundsfag og biologi er, at der er behov for at give eleverne en mere systematisk tilgang til hypotesetest. Samtidig er der kommet et politisk krav om, at de skriftlige prøver i samfundsfag A skal udformes, så man kan se, eleverne har glæde af, at de har haft matematik B. Det er vel også naturligt, at når bekendtgørelsen formulerer en binding mellem fagene, så bliver dette evalueret. Det samme politiske krav er

ikke formuleret overfor biologi A, men det kan sagtens komme.

Hypotesetest kan hurtigt blive meget omfattende og meget svært for eleverne. Efter en række overvejelser om, hvad der gavner samarbejdet mest, og hvad der samtidig er muligt at undervise eleverne i på en overskuelig tid, er forslaget til læreplansjustering blevet:

- *Chi-i-anden fordelingen med test for uafhængighed og test for goodness-of-fit (“test for repræsentativitet”)* inddrages i kernestoffet på stx B og stx A. Dvs. der stilles også skriftlige eksamensopgaver i emnet. Eleverne skal kende begreber som teststørrelse, konfidens og signifikans. Der bliver i et samarbejde med Institut for Matematiske fag i Ålborg udarbejdet et materiale som supplement til undervisningsvejledningen, hvor der dels anvises en mulig (og tilstrækkelig) indføring i det matematiske ræsonnement bag disse hypotesetest, og dels gives vejledende eksempler på eksamensopgaver. Tilgangen til dette statistiske emne vil i stor udstrækning være intuitiv. Materialet vil ligge klar til regional møderne i april.
- Det supplerende stof reduceres tilsvarende, så der kun bliver tale om yderligere mindst én sandsynlighedsteoretisk eller statistisk model.

Der ligger ikke i forslaget, at dette statistiske emne også skal inddrages som kernestof på hf B. Argumentet med samarbejdet med andre fag er jo ikke gældende for hf B. Men flere lærere har peget på, at når der ikke er en skriftlig dimension ved arbejdet med de statistiske emner, så kommer dette til at stå noget svagere ved mundtlig eksamen. Eleverne er ikke blevet tilstrækkelig fortrolige med stoffet. Det argument har givetvis en del i sig – men nok til at vi så skal gøre noget af det til skriftlig pensum? Eller er der andre løsninger, der kan styrke arbejdet på hf B med statistiske modeller og hypotesetest – som jo er en del af det supplerende stof? Under alle omstændigheder ville man også på et hf B hold kunne beslutte at inddrage chi-i-anden test med anvendelse af det materiale der udarbejdes.

6. Niveauernes forskellige profil, specielt *den større fordybelse på A-niveau i den matematiske teori* ønsker vi at understrege ikke alene gennem de omtalte ændringer af det supplerende stof, men yderligere ved følgende forslag til læreplansjustering i afsnittet om eksamen:

- *Bedømmelseskriterierne på A-niveau* omformuleres lidt, så afsnittet får følgende indledning: *“I denne vurdering lægges der vægt på om eksaminanden demonstrerer indsigt i matematisk teori, samt...”* (resten, som der står nu i læreplanen). Ethvert spørgsmål til mundtlig eksamen skal formuleres, så eleverne har mulighed for at opnå topkarakter, dvs leve fuldt ud op til kravene i bedømmelseskriterierne. Ikke alt er i spil i hvert spørgsmål, men ovenstående formulering betyder, at dette element altid skal være i spil. Man kan ikke stille spørgsmål til mundtlig eksamen, uden eleverne er godt forberedt herpå, så hensigten er naturligvis at understrege, at arbejdet med den matematiske teori skal spille en væsentlig rolle på A-niveau.

7. Den overvejende del af lærerne fortæller i evalueringer, *at den eksperimenterende tilgang til matematikken samt den øgede brug af værktøjsprogrammer til at støtte begrebsindlæring* fylder

lidt mere end tidligere. Men for de fleste netop kun lidt mere. Det kan skyldes, at vi ikke har tilvejebragt tilstrækkeligt med undervisningsmateriale – selv om der dog ligger en del på emu'en og i bogform – men forklaringen er nok snarere, at der ikke er tilvejebragt et materiale, der er tilstrækkeligt overbevisende til, at alle lærere kan se de didaktiske potentialer her. På dette felt er der virkelig brug for et stort udviklingsarbejde, og ganske meget er i gang:

- Mange lærere tager selv initiativer, henter programmer og laver spændende undervisningsmaterialer. Det ville være utrolig værdifuldt, hvis I der gør det, vil dele erfaringerne med andre – det kan være via bladet, via emu'en, DNA-portalen eller på anden vis.
- Det igangværende forsøg med øget brug af it og med netadgang ved skriftlig eksamen har deltagelse af 11 hold, og ser ud til at kunne blive et lærerigt eksperimentarium for de involverede – og med afkast til os alle via rapportering og andet.
- En arbejdsgruppe under matematiklærerforeningen om fagets udvikling med den øgede brug af it bliver sat i gang midt på året og vil invitere alle interesserede til at medvirke.
- I samarbejde med DTU kører på flere gymnasier et forsøg med anvendelse af Maple på

A-niveau hold, og tilsvarende starter nu i 2009 andre gymnasier i samarbejde med Matematisk Institut på KU også et Mapleforsøg. Maple er det mest anvendte værktøj på de matematiktunge videregående uddannelser, men udover denne umiddelbare interesse har begge forsøg fokus på at undersøge de didaktiske aspekter mht. begrebsindlæring. Det vil også blive ud-møntet i kursusvirksomhed.

Der vil med baggrund i de mange initiativer ikke for nærværende blive foreslået justeringer med sigte på en opgradering af inddragelsen af it – vi må afvente og lære af de erfaringer for-søgene giver.

8. Indførelse af *prøveform c)* var motiveret i at sikre, at en betydelig del af undervisningen bliver tilrettelagt som projektforsøg. I undervisnings-vejledninger beskrev vi i sin tid, hvad vi i ma-tematikfaget forstår ved et projekt. Men i diskus-sioner herom på efterårets regionalmøder viste der sig behov for at få beskrevet og eksemplifi-ceret dette på ny – gennem introduktion af begre-bet *temaopgave* og *temarapport*. Indtrykket fra både regionalmøder og andre møder med lærer-kollegier, med VUC-lærere osv var, at sådanne begreber kunne bidrage til at afklare, hvad ide-en er. Derfor foreslås læreplanen justeret på det-te punkt, så det kommer til at hedde:

- En betydelig del af undervisningen tilrette-lægges som projektforsøg eller større tema-opgaver over forskellige del af... (osv., som der står). Afsnittet om mundtlig eksamen ju-steres tilsvarende.

9. *Det faglige samarbejde med studieretnings-fagene* er mange steder begrænset til samar-bejdet om studieretningsopgaven og det individuel-le samarbejde om studieretningsprojektet. Dette blomstrer fint, der ydes en imponerende indsats fra mange kolleger, og de foreløbige indberet-ninger tyder også på en generel højnelse af kva-liteten af opgaveformuleringerne.

Det står derimod noget svagere til med sam-arbejdet ud over disse 'højdepunkter'. Der er ganske meget materiale til rådighed – både på emu'en, på DNA-portalen, i emnebøger og og-så i en række af lærebøgerne, der er kommet si-

den reformen. Der har løbende været et udvik-lingsarbejde relateret til de fleste typer af fagligt samarbejde, ikke mindst fra matematiklærerfor-eningen og fra vores gode venner på universite-terne. Netop nu er der gang i et mat-bio projekt. Måske er der så meget materiale, at der mangler overblik – og det kan da overvejes om man i for-lagets regi eller som ren web-publication skulle udarbejde en overskuelig præsentation af tilgæn-geligt materiale og litteratur på alle de forskelli-ge felter. Mon ikke der var kolleger, som havde lyst og energi til at være med til det?

I læreplanerne er der et afsnit specielt om sam-spil med andre fag. Der er fra andre fag udtrykt ønske om, at dette bliver gjort mere forpligtende. Da matematik er i samarbejde med rigtig mange fag kan det være svært at udforme specifikke fag-lige krav her, men der står faktisk klart formu-leret, at hvor faget indgår i en studieretning skal der tilrettelægges et fagligt samarbejde. Man kan gøre dette mere forpligtende, så det fremgår, at der er tale om sammenhængende forløb og ved at tilføje, at *de undervisningsforløb, der laves i samarbejde med andre fag, også skal fremgå af undervisningsbeskrivelserne i matematik.*

10. *Matematik indgår yderst beskedent i den af-sluttende eksamen i AT* – på enkelte skoler er der slet ingen der vælger matematik. Med erfa-ringen fra nu to års eksamensopgaver, hvor em-nerne var meget forskellige, men ikke fjerne og mærkelige set fra matematiks side (henholdsvis *forudsigelser* og *rejser*, herunder opdagelsesrej-ser), så må forklaringen findes andre steder end i selve opgaven. Matematik indgår faktisk i rigtig mange AT-forløb på skolerne. Her går man vel ofte på tværs af fakultetsgrænserne, så umuligt er det ikke. Men derfor er det alligevel fornuftigt at diskutere om hovedområdeinddelingen er en begrænsende faktor. Forklaringen kan imidlertid næppe begrænses til noget strukturelt.

Hvis man ikke er vant til at se faget i disse bredere sammenhænge kan det være svært hur-tigt at ryste en række ideer ud af ærmet. Der lig-ger en pæn del i ressourcerummet, men det skal jo omsættes, og hvad med litteratur osv. Måske skulle vi overveje at efterligne teologisk fakul-tet(!), der dette år havde indskrevet en task-for-

ce, som i løbet af to dage efter offentliggørelsen havde lagt et stort antal ideer med litteratur og andet på en hjemmeside til inspiration. Det kunne være én vej frem for at hjælpe kollegerne, i alt fald en række år frem.

Måske er der også usikkerhed over for, hvad kravene egentlig er for at matematik kan indgå. Hvad er matematisk teori og metode, hvad er elementær videnskabsteori set fra matematikfagets verden? Matematiklærerforeningen har fået tilskud til et udviklingsarbejde på dette område, og der inviteres bredt ud til kolleger med viden og interesse på dette felt om at deltage heri. Gode universitetsfolk vil også medvirke. Og det skal bl.a. føre til udarbejdelsen af et kursusmateriale.

Samtidig skal vi være opmærksomme på, at tilsvarende diskussioner foregår i andre fag og i AT's regi. Selv om andre fag er stærkt repræsenteret ved AT-eksamen er det ikke ensbetydende med, at de har fuldstændig styr på disse begreber om teori og metode. Der er således fra mange sider rejst ønsker om at få præciseret, hvad der menes med elementær videnskabsteori, samt at få fastslået hvem der underviser i hvad. Da underviserne altid er faglærere må det naturlige valg være, at fagets lærer underviser i fagets metoder og teorier og heri inddrager elementær videnskabsteori. En naturlig løsning på dette kan være, at de faglige mål suppleres med en pind der siger, *at eleverne skal kunne demonstrere viden om og indsigt i fagets egenart og metode.*

11. *Forholdet mellem matematiske kompetencer og matematiske færdigheder* er genstand for tilbagevendende diskussioner. At eleverne i dag er dårligere til algebraisk manipulation med symbolske udtryk og til brøkgregning, når de ikke har adgang til et værktøj, er uomtvistelig. Det er således ingen sag at lave prøver med opgaver, som en matematiklærer måske mener elever og studenter burde kunne klare, og som vi ved de ikke kan, og som derfor igen og igen kan bekræfte os i, at vi lærte meget mere i gamle dage. Spørgsmålet er, om der er gået væsentlige færdigheder tabt. Det er muligt, men svaret herpå kan nok ikke findes ved alene at spørge forskellige lærere, hvad de synes.

Det er heller ikke et tilfredsstillende svar at påstå, spørgsmålet er forkert stillet, fordi vi nu kun har fokus på kompetencerne. Kompetencerne kommer også til udtryk på grundlag af færdigheder. Men der mangler en grundigere kortlægning af, hvilke færdigheder der er behov for, når man skal agere i et moderne samfund, og når man skal læse videre. Et sådant udredningsarbejde burde sættes i gang.

I forsøget med it og netadgang har vi – efter drøftelser med universitetsrepræsentanter – lavet et andet snit mellem prøven uden og prøven med. Dels er timerne på A-niveau fordelt med  $2 + 3$  i stedet for  $1 + 4$ . Og samtidig har vi indført, at prøven uden er en prøve uden elektronik, men med adgang til en formelsamling. En sådan opgradering af prøven uden kunne også på sigt komme på tale generelt. For ikke at være låst fast mht. timerne foreslås sætningen i afsnittet om skriftlig eksamen, hvor der tales om 1 time uden hjælpemidler, erstattet af, at vi blot taler om 1. og 2. delprøve.

*De justeringer vi ender med at blive enige om forventer jeg indføres i læreplanerne før sommeren, så de gælder for de elever, der starter i gymnasiet og på hf sommeren 2009. Men det afhænger naturligvis af den politiske proces. På samme måde er de konkrete ændringer i læreplaner også i sidste ende en beslutning i det politiske system.* ◇