Cardanos formel

POUL ROSE, Vordingborg

I denne artikel fortsætter Poul Rose sin behandling af metoder til løsning af 3.grads ligninger. Artiklen er et supplement til artiklen om kontrolassistenten i LMFK-bladet nr. 6, 2008.

Indledning

Tredjegradsligning $x^3 + p\cdot x + q = 0$ har ifølge Cardanos formel løsningen

$$x = \sqrt[3]{\sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}} - \frac{q}{2}} - \sqrt[3]{\sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}} + \frac{q}{2}}$$

Denne formel har historisk spillet en rolle, men hvis jeg hypotetisk skulle undervise et hold elever i emnet tredjegradsligninger, ville jeg ikke starte med at nævne den. For hvis man tidligt i forløbet trækker den lange, imponerende formel frem i lyset, er det nærliggende for eleverne at bruge den til løsning af en tilsyneladende simpel ligning som $x^3 - 3x + 2 = 0$.

De finder korrekt løsningen $x = -2$. Jeg gætter på, at nogle af eleverne vil tro, at de hermed er færdige, fordi de under beregningen ikke har mødt kvadratroden af et negativt tal og dermed ikke direkte er ansporet til at træde ud i den komplekse plan. Det er en lidt urimelig situation. For derude kan man regne sig frem til endnu en reel løsning, nemlig $x = 1$. At den er let at gætte, anfægter ikke det principielle i sagen. En sådan situation kan undgås.

Metode

Hvis man er fortrolig med formlen

$$(a + b)^3 = a^3 + b^3 + 3\cdot a\cdot b\cdot(a + b)$$

er vejen fra en tredjegradsligning af form

$$x^3 + p\cdot x + q = 0 \qquad (1)$$

til den helt centrale ligning (3) ganske kort. Man skal blot huske, at x skal erstattes med udtrykket $x = z + w\cdot\frac{1}{z}$, hvor z er en ny variabel, og w er en konstant, hvis størrelse, man ikke behøver at belaste sin hukommelse med. For indsættes i (1), får man

$$z^3 + w^3\cdot\frac{1}{z^3} + 3\cdot w\cdot(z + w\cdot\tfrac{1}{z}) + p\cdot(z + w\cdot\tfrac{1}{z}) + q = 0$$

Heraf ses, at det er fordelagtigt at vælge w således, at $3w$ er lig $-p$, dvs. $w = -\frac{p}{3}$. Variabelskiftet foretages altså med udtrykket:

$$x = z - \frac{p}{3}\cdot\frac{1}{z} \qquad (2)$$

Det giver:

$$z^3 + w^3\cdot\frac{1}{z^3} + q = 0 \text{ eller}$$

$$z^6 + q\cdot z^3 + w^3 = 0 \text{ eller}$$

$$z^6 + q\cdot z^3 - \frac{p^3}{27} = 0.$$

Så kan man finde et eksplicit udtryk for z^3:

$$z^3 = -\frac{q}{2} \pm \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}} \qquad (3)$$

Komplekse tal

Fra nu af kræves kendskab til komplekse tal. I den komplekse plan har denne ligning 3 løsninger for z. Her vil jeg indskærpe, at man skal finde dem alle, også selv om man kun er interesseret i reelle løsninger for x.

a) Hvis z^3 er positiv reel, har z^3, opfattet som komplekst tal, argumentet $h\cdot 360°$, hvor h er et helt tal. Så kan man komme frem til algebraiske udtryk for z, fordi det er muligt at tredele en vinkel på 360°. Herfra kan man komme videre til algebraiske udtryk for x ved hjælp af (2).

b) Hvis z^3 er negativ reel, har z^3, opfattet som komplekst tal, argumentet $180° + h\cdot 360°$, hvor h er et helt tal. Så kan man komme frem til algebraiske udtryk for z, fordi det er muligt at tredele en vinkel på 180°. Herfra kan man komme videre til algebraiske udtryk for x ved hjælp af formel (2).

c) Hvis z^3 er kompleks, kan man komme frem til algebraiske udtryk for z, hvis man med algebraiske metoder kan tredele vinklen mellem den reelle akse og stedvektoren til det komplekse tal z^3. Hvis man ikke kan tredele vinklen, kan man komme frem til eksplicitte, men ej algebraiske udtryk for z ved hjælp af trigonometriske beregninger af vinklen, hvis talværdi deles med 3. Dernæst anvendes formel (2).

d) Hvis z^3 ligger på enhedscirklen i den komplekse plan, vil de tre værdier for z også ligge på enhedscirklen. Selv om man endnu ikke har

Matematik

fundet a og b i en løsning for $z = a + i \cdot b$, så ved man, at $a^2 + b^2 = 1$. Under arbejdet kan det hænde, at man havner i et punkt på den reelle akse, dvs. en reel løsning.

e) Antallet af reelle løsninger kan vurderes ved undersøgelse af grafen for funktionen $f(x) = x^3 + p \cdot x + q$. Differentialkvotienten er $f'(x) = 3x^2 + p$. Hvis p er positiv, er funktionen voksende, og der er én reel løsning. Graftegning er unødvendig. Hvis p er negativ vurderes beliggenhed af lokalt maksimum og lokalt minimum på en skitse.

Eksempel 1

I ligningen fra indledningen $x^3 – 3x + 2 = 0$ er $p = –3$ og $q = 2$. Indsættes udtrykkene for p og q i formel (2) og (3), får man henholdsvis $x = z + \frac{1}{z}$ og $z^3 = –1$. z^3 ligger på enhedscirklen i den komplekse plan. Se punkt d) ovenfor.

Indsættes i udtrykket for x et udtryk for z af form $a + i \cdot b$, får man

$$\begin{aligned} x &= z + \frac{1}{z} = a + i \cdot b + \frac{1}{a + i \cdot b} \\ &= a + i \cdot b + \frac{a - i \cdot b}{a^2 + b^2} \\ &= a + i \cdot b + a - i \cdot b = 2a \qquad (4) \end{aligned}$$

Altså et reelt tal. Når man i det følgende finder udtryk for z, skal man især kere sig om a.

Vi går til ligningen $z^3 = –1$, der så åbenbart har løsningen –1, men nu søger vi tre løsninger.

Vinklen mellem den reelle akse og vektoren til det komplekse tal $–1 + i \cdot 0$ er 180°. Tallets argumenter er $180° + h \cdot 360°$ hvor h er et helt tal. Dette deles med 3: $60° + h \cdot 120°$.

- Med $h = 0$ fås

  $$z = \cos(60°) + i \cdot \sin(60°) = \frac{1}{2} + i \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

  Det giver $x = 2a = 1$ ved hjælp af (4).
- Med $h = 1$ fås
  $z = \cos(180°) + i \cdot \sin(180°) = –1.$
  Det giver $x = 2a = –2$.
- Med $h = 2$ fås

  $$z = \cos(300°) + i \cdot \sin(300°) = \frac{1}{2} - i \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

  Det giver $x = 2a = 1$ ved hjælp af (4).

Tallet 1 er dobbeltrod. Ligningen $x^3 – 3x + 2 = 0$ har løsningsmængden $\{–2, 1\}$.

Eksempel 2

I ligningen $x^3 – 3x + \sqrt{2} = 0$ er $p = –3$ og $q = \sqrt{2}$. Indsættes i formel (2) og (3), får man henholdsvis

$$x = z + \frac{1}{z} \text{ og}$$

$$z^3 = \frac{-\sqrt{2} \pm i \cdot \sqrt{2}}{2}$$

Bemærk, at z^3 ligger på enhedscirklen i den komplekse plan. Se punkt d) ovenfor.

Da p har samme værdi som i *Eksempel 1*, gælder formel (4) også her. Først anvendes plustegnet i formlen. Vinklen mellem den reelle akse og stedvektoren til det komplekse tal

$$\frac{-\sqrt{2} + i \cdot \sqrt{2}}{2}$$

er 135°. Tallets argumenter er $135° + h \cdot 360°$, hvor h er et helt tal. Dette deles med 3: $45° + h \cdot 120°$.

- Med $h = 0$ fås

  $$z = \cos(45°) + i \sin(45°) = \frac{\sqrt{2}}{2} + i \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

  Det giver løsning nr. 1 ved hjælp af (4):
  $x = 2a = \sqrt{2}$.
- Med $h = 1$ fås
  $z = \cos(165°) + i \cdot \sin(165°)$
  $= – \cos(15°) + i \cdot \sin(15°)$.
  Så må man gå på jagt efter et algebraisk udtryk for cos(15°) for eksempel ved at regne på cos(45° – 30°) – eller ved at slå op i en bog. Det giver

  $$z = -\frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4} + i \cdot \sin(15°).$$

  Så har man løsning nr. 2:

  $$x = 2a = -\frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{2}.$$

  Igen er (4) inde i billedet.
- Med $h = 2$ fås
  $z = \cos(285°) + i \cdot \sin(285°)$
  $= \cos(75°) – i \cdot \sin(75°)$
  $= \sin(15°) – i \cdot \cos(15°)$.
  Så må man gå på jagt efter et algebraisk udtryk for sin(15°) for eksempel ved at regne på sin(45° – 30°). Det giver

  $$z = \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4} + i \cdot \cos(15°).$$

  Så har man løsning nr. 3:

  $$x = 2a = \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{2}.$$

Når man har fundet 3 forskellige løsninger, kan man holde op med at søge. Med

$$z^3 = \frac{-\sqrt{2} - i\cdot\sqrt{2}}{2}$$

får man blot gengangere. Alt i alt: Ligningen

$$x^3 - 3x + \sqrt{2} = 0$$

har 3 reelle, *algebraiske* løsninger, om end der har været et mellemspil med trigonometri anvendt på "pæne" vinkler. Det siges, at der i det reelle talområde ikke findes nogen formel, der kan gengive den slags løsninger, selv om de er reelle. Man *skal* en tur ud i den komplekse plan. Løsningsmængden er:

$$\{-\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{2}, \sqrt{2}\}$$

Det kan selvfølgelig afprøves ved direkte indsættelse i ligningen.

I disse to eksempler blev grafundersøgelse ikke anvendt, men denne er dog i almindelighed at anbefale.

Bemærkning

I det tilfælde, hvor $\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27} > 0$, kan man i det reelle talområde omskrive formel (3) til

$$z = \sqrt[3]{\sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}} - \frac{q}{2}}$$

idet det er ligegyldigt, om man bruger plustegnet eller minustegnet i formel (3). Her er plustegnet anvendt.

Hvis dette indsættes i formel (2), fremkommer et udtryk, der efter et betragteligt reduktionsarbejde bliver til den formel, der har fået navn efter Cardano. Da dette tager en del tid, og formlen i praksis kan undværes, ville jeg ikke nævne dette over for et hold elever, men nok over for en enkelt nørd. Cardanos formel bør ej bruges, hvis $\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27} = 0$. Så kan man havne i den situation, der er beskrevet i indledningen.

Løsninger, der ikke er algebraiske

Det er det tilfælde under punkt c) ovenfor, hvor man *ikke* med geometriske / algebraiske midler kan tredele vinklen mellem den reelle akse og stedvektoren til det komplekse tal z^3, hvilket mildt sagt er det normale. z^3 i (3) er kompleks, når $\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27} < 0$. Så må p være negativ. Vi skriver $p = -|p|$, hvor $|p|$ er den numeriske værdi af p. Dette indsættes i (3) med plustegnet anvendt. Så kan man skrive:

$$z^3 = -\frac{q}{2} + i\cdot\sqrt{\frac{|p|^3}{27} - \frac{q^2}{4}}$$

Her vil jeg røbe hensigten med det følgende, så man kan se, hvad der styres efter. Lad z være en løsning til denne ligning. Lad x være det, der fremkommer efter indsættelse i (2). x skrives på formen $x = a + i\cdot b$.

Selv om man ikke algebraisk kan finde a, *kan man bevise, at b eksakt er lig* 0. (5)

Dette finder jeg værd at vise. Med det for øje findes modulus for z^3:

$$\sqrt{(-\frac{q}{2})^2 + \frac{|p|^3}{27} - \frac{q^2}{4}} = \sqrt{\frac{|p|^3}{27}}$$

Så bliver modulus for z lig $\sqrt{\frac{|p|}{3}}$. Argumentet for z^3 betegnes med u. Man har

$$\tan(u) = \frac{\sqrt{\frac{|p|^3}{27} - \frac{q^2}{4}}}{-\frac{q}{2}}$$

I en situation, hvor man kender p og q, kan man finde et tal for u, men man skal passe på, fordi tangens er periodisk med perioden 180°. Man skal vælge den værdi for u mellem 0 og 360, der ligger i samme kvadrant som z^3. Så er argumenterne for z^3 lig $u + h\cdot 360°$, hvor h er et helt tal.

Argumenterne for z er da lig $\frac{u}{3} + h\cdot 120°$. En af disse betegnes med v, dvs.

$$z = \sqrt{\frac{|p|}{3}}\cdot(\cos(v) + i\cdot\sin(v)).$$

Dette indsættes i (2), og der foretages en omskrivning (*) som vist i boksen øverst på næste side.

Af denne omskrivning fremgår, at den rent imaginære del er lig

$$i\cdot\sqrt{\frac{|p|}{3}}\cdot\left[\sin(v) + \frac{p}{|p|}\cdot\sin(v)\right]$$

Nu kommer det afgørende: Betingelsen

$$\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27} < 0$$

indebar, at p er negativ. Så er brøken $\frac{p}{|p|} = -1$. Det betyder: *Den rent imaginære del er lig* 0. Denne konklusion afhænger ikke af, om værdien for

Omskrivningen (*), omtalt i højre spalte på forrige side:

$$
\begin{aligned}
x &= z - \frac{p}{3}\cdot\frac{1}{z}\\
&= \sqrt{\frac{|p|}{3}}\cdot(\cos(v) + i\cdot\sin(v)) - \frac{p}{3}\cdot\frac{1}{\sqrt{\frac{|p|}{3}}\cdot(\cos(v) + i\cdot\sin(v))}\\
&= \sqrt{\frac{|p|}{3}}\cdot(\cos(v) + i\cdot\sin(v)) - \frac{p}{3}\cdot\frac{\sqrt{\frac{|p|}{3}}}{\frac{|p|}{3}\cdot(\cos(v) + i\cdot\sin(v))}\\
&= \sqrt{\frac{|p|}{3}}\cdot(\cos(v) + i\cdot\sin(v)) - \frac{p}{|p|}\cdot\frac{\sqrt{\frac{|p|}{3}}\cdot(\cos(v) - i\cdot\sin(v))}{(\cos(v) + i\cdot\sin(v))\cdot(\cos(v) - i\sin(v))}\text{, hvor nævneren er 1}\\
&= \sqrt{\frac{|p|}{3}}\cdot\left[(\cos(v) + i\cdot\sin(v)) - \frac{p}{|p|}\cdot(\cos(v) - i\cdot\sin(v))\right]
\end{aligned}
$$

$\sin(v)$ kan findes algebraisk eller ej! Altså er x lig den reelle del.

$$
\begin{aligned}
x &= \sqrt{\frac{|p|}{3}}\cdot\left[\cos(v) - \frac{p}{|p|}\cdot\cos(v)\right]\\
&= \sqrt{\frac{|p|}{3}}\cdot[\cos(v) + \cos(v)]\\
&= \sqrt{\frac{|p|}{3}}\cdot 2\cdot\cos(v) \qquad (6)
\end{aligned}
$$

Eksempel 3

I ligningen $x^3 - 6x + 2 = 0$ er $p = -6$ og $q = 2$. Indsættes udtrykkene for p og q i formel (2) og (3), får man henholdsvis

$$x = z + \frac{2}{z} \text{ og } z^3 = -1 \pm i\cdot\sqrt{7}.$$

I det følgende anvendes plustegnet. Modulus for z^3 er lig $\sqrt{8}$. Så bliver modulus for z lig $\sqrt{2}$ Argument for z^3 betegnes med u. Da $\tan(u)$ er lig $-\sqrt{7}$, er

$u = 110{,}7048111° + h\cdot 360°$.

Dette deles med 3. Argument for z betegnes med v og er $36{,}9016037° + h\cdot 120°$.

Uden kendskab til (5) og (6) ville det være nærliggende at skrive:

For $h = 0$, er

$z = \sqrt{2}\cdot(\cos(36.9016037°) +$

$i\cdot\sin(36.9016037°))$,

Det er ikke forkert, men *det skal man ikke gøre*. For går man møjsommeligt videre med de mange decimaler og indsætter udtrykket for z i udtrykket for x, kan det hænde, at man kommer til et udtryk for x af form $x = a + i\cdot b$, hvor b blot adskiller sig fra 0 i de yderste decimaler. Så kan man komme i tvivl: Er x reel eller kompleks? Denne tvivl er bortvejret med sætning (5). Med formel (6) in mente kan man straks skrive:

- For $h = 0$, er

$$
\begin{aligned}
x &= \sqrt{\frac{|p|}{3}}\cdot 2\cdot\cos(v)\\
&= \sqrt{\frac{6}{3}}\cdot 2\cdot\cos(36.9016037°)\\
&= 2{,}261802245
\end{aligned}
$$

- For $h = 1$, er

$$
\begin{aligned}
x &= \sqrt{2}\cdot 2\cdot\cos(36.9016037° + 120°)\\
&= -2{,}601679132
\end{aligned}
$$

- For h = 2, er

$$
\begin{aligned}
x &= \sqrt{2}\cdot 2\cdot\cos(36.9016037° + 240°)\\
&= 0{,}339876887
\end{aligned}
$$

Disse tre tal er løsninger til ligningen $x^3 - 6x + 2 = 0$. Man behøver ikke at prøve med minustegnet i udtrykket $z^3 = -1 \pm i\cdot\sqrt{7}$. ◊