Differentiation uden grænseværdi

Jens Carstensen, Tårnby Gymnasium

Man kan bestemme den afledede af de elementære funktioner

$$f(x) = ax^2 + bx + c,\;\; g(x) = \tfrac{a}{x},\;\; h(x) = \sqrt{x}$$

uden brug af grænseværdibegrebet. Måske kan dette have interesse for gymnasiet, hvor grænseværdi jo er et vanskeligt og uhåndgribeligt emne for en del elever. Vi benytter i alle tre tilfælde, at en tangent til grafen er en (ikke lodret) linje med præcis ét fælles punkt med grafen.

I. $f(x) = ax^2 + bx + c$

Lad tangentens ligning være $y = px + q$. Røringspunktets x-koordinat fås af ligningen

$$ax^2 + bx + c = px + q \Leftrightarrow$$
$$ax^2 + (b - p)x + c - q = 0.$$

Denne ligning skal have præcis én løsning, så diskriminanten er 0. Løsningen er så

$$x = \frac{p-b}{2a}.$$

Heraf bestemmes hældningen p:

$$x = \frac{p-b}{2a} \Leftrightarrow p = 2ax + b.$$

Tangenthældningen p er differentialkvotienten, så

$$f\,'(x) = 2ax + b.$$

II. $g(x) = \frac{a}{x}$

Lad igen tangentens ligning være $y = px + q$. Røringspunktets x-koordinat bestemmes af ligningen

$$\frac{a}{x} = px + q \Leftrightarrow px^2 + qx - a = 0$$

Her skal diskriminanten være 0, og den ene løsnings x-koordinat er så

$$x = -\frac{q}{2p} \Leftrightarrow q = -2px$$

Ligningen ovenfor ser nu sådan ud:

$$\frac{a}{x} = px + q \Leftrightarrow$$

$$\frac{a}{x} = px - 2px \Leftrightarrow$$

$$\frac{a}{x} = -px \Leftrightarrow p = -\frac{a}{x^2}$$

Tangenthældningen p er differentialkvotienten, så

$$g'(x) = -\frac{a}{x^2}$$

III. $h(x) = \sqrt{x}$

Tangentens ligning er $y = px + q$, så røringspunktets x-koordinat fås som løsning til ligningen

$$\sqrt{x} = px + q \Leftrightarrow x = p^2x^2 + q^2 + 2pqx$$

$$p^2x^2 + (2pq - 1)x + q^2 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{1-2pq}{2p^2}$$

Her har vi benyttet, at diskriminanten d skal være 0:

$$d = 0 \Leftrightarrow$$

$$(2pq - 1)^2 - 4p^2q^2 = 0 \Leftrightarrow$$

$$-4pq + 1 = 0 \Leftrightarrow 2pq = \frac{1}{2}$$

Men så er

$$x = \frac{1-\frac{1}{2}}{2p^2} = \frac{1}{4p^2} \Leftrightarrow$$

$$4p^2 = \frac{1}{x} \Leftrightarrow p = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

Da tangenthældningen er p, er differentialkvotienten dermed

$$h'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

Disse metoder kan formodentlig ikke erstatte eller overflødiggøre grænseværdibegrebet. Men dette kan måske nu udelukkende tages ganske kort teoretisk, mens den egentlige udledning af de afledede for de elementære funktioner kan benytte ovenstående grænseværdifri metode. Kurset i differentialregning på B-niveau er under alle omstændigheder reduceret til et pop-kursus, og alle mere komplicerede funktioners afledede udledes ikke mere eksakt. Det drejer sig fx om funktionerne:

$$y = \log(x),\;\; y = \ln(x),\;\; y = a^x,\;\; y = x^n.$$

Henvisning

Mel Wahl: "Derivatives Without Limits", *Math Horizons*, November 2008, Mathematical Association of America. ◊