Galois teori

TANJA TOFTEBY, Studerende, Københavns Universitet

Galois var en fransk revolutionær – og matematiker – der før sin død som 21-årig nåede at løse et gammelt matematisk problem vedrørende løsning af *n*-'tegrads ligninger og i øvrigt bidrog med gruppeteori.

Ifølge Algebraens Fundamentalsætning har enhver ligning af n-te grad n løsninger inden for de komplekse tal. Som vi ved, kan ligninger af grad mindre end 5 løses ved roduddragning. Ikke alle ligninger af grad større eller lig med 5 har denne egenskab. Galois teorien giver en metode til at afgøre, hvornår n-te gradsligninger kan løses med roduddragning.

2.-gradsligninger

Løsningen til 2.-gradsligninger var kendt allerede 300 f. Kr. Løsningen til disse havde på det tidspunkt en geometriske tilgang frem for en aritmetisk. Dvs., man konstruerede løsninger iterativt med passer og lineal.

I 1500-tallet blev en løsning til 2.-gradsligningen, der ligner den generelle løsning, vi kender i dag, publiceret første gang af Michael Stifel. Problemet med at finde en generel løsning var, at man ikke accepterede roduddragning af negative tal, og at 0 i øvrigt ikke ansås for et mulig løsning. Dette fik matematikerne til at opdele ligningerne i særlige tilfælde efter fortegnet på koefficienterne.

Løsning af 2.-gradsligninger

For 2.-gradspolynomiet $p(x) = ax^2 + bx + c$ er rødderne som bekendt givet ved $\frac{-b \pm \sqrt{d}}{2a}$, hvor diskriminanten d er givet ved $d = b^2 - 4ac$.

3.-gradsligninger

Da stillingerne på universiteterne var tidsbegrænsede, skulle de ansatte bevise deres værd for at kunne vedblive at være ansatte. Derfor duellerede matematikerne i renæssancen ved at opstille forskellige matematiske problemer til hinanden. Niccolò Tartaglia og Antonio Maria Fior havde stillet hinanden 40 opgaver hver. Opgaverne skulle besvares indenfor 50 dage. Det rygtedes hurtigt, at Tartaglia var i stand til at besvare alle Fior's 40 opgaver på bare 2 timer. Girolamo Cardano tog kontakt til Tartaglia og spurgte, hvordan det kunne lade sig gøre. Tartaglia svarede, at de 40 opgaver var af samme type: de var alle 3.-gradsligninger, og at han besad den generelle løsning hertil.

Cardano prøvede at få løsningen tilsendt af Tartaglia med løftet om ikke at publicere den. Tartaglia troede ham ikke, og der fulgte en brevveksling med fornærmelser i kølvandet på dette. Til sidst indvilligede Tartaglia i at besøge Cardano. Igen lovede Cardano ikke at publicere løsningen, og Tartaglia gav efter.

Det kom senere Tartaglia for øre, at Cardano gik rundt og sagde, at han nu havde fundet nye løsninger i algebraen, og at disse ville blive publiceret i et nyt værk. Cardano valgte at publicere med argumentet, at løsningen alligevel var almen kendt. Tartaglia og Cardano talte ikke sammen igen. Løsningen er siden blevet kendt som Cardanos formel.

Løsning af 3.-gradsligninger ved Cardanos formel:

Lad $p(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$. Ved at erstatte x med $x - \frac{b}{3}$, kan $p(x)$ erstattes med et polynomium af formen $x^3 + px + q$.

En rod heri er da givet ved Cardanos formel:

$$\sqrt[3]{\frac{-q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}} + \sqrt[3]{\frac{-q}{2} - \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p3}{27}}}$$

I 1500-tallet kendte man ikke til komplekse tal. Formlen gav derfor problemer, hvis radikanden under kvadratrodstegnet var negativ. Hvis denne radikand er positiv, har 3.-gradsligningen netop én reel rod, og den er givet ved Cardanos formel, idet kubikrødder af negative tal ikke giver problemer.

4.-gradsligningen

4.-gradspolynomiet kan omskrives til et produkt af to polynomier af grad 2. Dvs, løsning til ligninger af grad 4 også var kendt i renæssancen.

Ligninger af grad større end 4.

Da man nu havde løsninger med roduddragning til ligninger af grad mindre eller lig med 4, var det naturligt at søge løsninger til ligninger af grad større end 4. Paolo Ruffini kom i 1798 som den første med et forsøg på at vise, at der måske ikke fandtes en generel løsning til 5.-gradsligningen. Beviset indeholdt mange fejl, men de basale underliggende ideer var korrekte. Med dette ændrede problemstillingen sig. I stedet for at søge løsninger søgte Ruffini et bevis for, at den generelle løsning ikke findes.

Niels Henrik Abel

Den norske matematiker Niels Henrik Abel (1802-1829) forsøgte at løse 5.-gradsligningen ved rodtegn og mente at være kommet igennem med det. Han forfattede et brev om denne løsning, men inden det kunne publiceres, blev han bedt om at komme med nogle eksempler. I sin søgen efter eksempler indså han, at hans argumenter ikke holdt.

I 1824 udgav han for egen regning en pamflet, hvori han viste, at den generelle løsning af 5.-gradsligningen ved rodtegn er umulig. Idet argumentationen i denne pamflet var meget kortfattet, kunne mange matematikere ikke forstå den. 2 år senere blev en udvidet version publiceret i *Journal für die reine und angewandte Mathematik*.

Abel rejste på dette tidspunkt rundt i Europa for at diskutere og skabe kontakter med andre matematikere. Da han vendte tilbage til Norge i 1827, var der ingen ledig stilling til ham på Oslo Universitet. Abel skaffede sig til dagen og vejen ved at vejlede og vikariere på universitetet, men i 1829 blev han ramt af tuberkulose, som han døde af i april måned.

Abels bevis gik på, at der ikke findes en generel løsning til 5.-gradsligningen, men man kunne forestille sig, at der fandtes løsninger til hvert tilfælde af polynomier af en given form, og at disse bare ikke kunne udtrykkes ved en samlet løsning. Evariste Galois viste, at heller ikke dette var tilfældet.

Evariste Galois

Evariste Galois (1811-1832) var en fransk matematiker, der også døde i en ung alder. På trods af at han publicerede et brev, før han blev 18 og forfattede en note om løsninger af ligninger af primtalsorden, dumpede han 2 gange til optagelsesprøven på École Polytechnique. Den første gang formentlig fordi han ikke mestrede det basale, og anden gang måske fordi hans far 5 dage forinden havde begået selvmord, efter at han som borgmester havde været rodet ind i en politisk skandale.

Galois måtte da tage til takke med en optagelse på École Normale, hvor eleverne blev spærret inde i bygningen af rektor for at undgå, at de blandede sig i den politiske debat, der førte til revolutionen i juli 1830. Efter at have kommet med politiske angreb mod rektor, blev Galois bortvist fra skolen og tilsluttede sig en stærkt republikansk division af National Garden.

Sideløbende med sit politiske engagement fortsatte Galois med at udforske løsninger af ligninger. I januar 1831 sendte han et manuskript til akademiet, som 6 måneder efter afviste det med begrundelsen, at man ikke forstod beviserne. Galois skulle fuldende og uddybe sin teori. I mellemtiden var Galois blevet arresteret 2 gange. Første gang for at true kongen på livet, anden gang for at bære uniformen til den nu opløste division af National Garden. I sin vrede over afslag fra akademiet skrev han fra sin fængselscelle en note, hvori han angreb de officielle forskere. Noten havde til formål at skulle indgå i forordet på hans kommende værk. Inden publiceringen kunne foretages, døde Galois i en duel.

Baggrunden for duellen ved man ikke meget om, men en af teorierne er – hvad mange dog betvivler – at Galois involverede sig med en dame og i den forbindelse blev udfordret til duel. Med bange anelser skrev Galois dagen inden duellen et brev til sin ven Auguste Chevalier. Han beder Chevalier om at forelægge Jacobi og Gauss sine manuskripter '… de donner leur avis non sur la vérite, mais sur l'importance des théorèmes. Après cela il se trouvera, j'espère, des gens qui trouveront leur profit à déchiffrer tout ce gâchis.' (På dansk: …give deres mening, ikke om rigtigheden men om vigtigheden af disse sætninger. Derefter håber jeg, der vil findes folk, der får udbytte af at dechifrere alt dette forstyrrede rod.).

Galois døde dagen efter i duellen 20 år gammel.

Galoisgruppen

Galois' tilgang til løsninger med roduddragning bestod af betragtning af rødderne til et polynium og relationer mellem disse.

Lad $p(x) = x^n + a_1 x^{n-1} + \dots + a_n$ være et normeret polynomium af n. grad med rationale koefficienter. Det er ingen begrænsning at betragte normerede polynomier, da man ellers blot kan dividere igennem med højestegradskoefficienten.

Lad $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ være de n rødder. Lad $\sum q_{i_1} \dots q_{i_n} \alpha_l^{i_1} \dots \alpha_l^{i_n} = 0$, hvor q_i'erne er rationale tal, og i_1, ..., i_n gennemløber endeligt mange hele ikke-negative tal, være en relation mellem rødderne.

Lad G være mængden af de permutationer af tallene $\{1, \dots, n\}$, for hvilke relationerne mellem rødderne bevares efter de tilsvarende permutationer af rødderne.

Hvis f.eks. $n = 2$, kunne $\alpha_1 + a_2 = 0$ være en relation. Ombytning af rødderne vil da være en permutation, der bevarer relationen, da også $\alpha_2 + a_1 = 0$.

Mængden G udgør det, man i algebra kalder en gruppe, og G er i denne sammenhæng simpelthen *Galoisgruppen* for polynomiet $p(x)$. Man kan vise, at i de tilfælde, hvor et polynomiums Galoisgruppe er det, man kalder opløselig, kan rødderne findes ved rodtegn.

Lad $f(x)$ være et polynomium af grad p med rationale koefficienter, og lad p være et primtal. Hvis $f(x)$ ikke kan skrives som produkt af 2 polynomier af grad større end 0 med rationale koefficienter (dette siges at være *irreducibelt*), og hvis

Evariste Galois tegnet som 15-årig af en klassekammerat. "Liberté, egalité, fraternité ou la mort."

polynomiet har præcis $p - 2$ reelle rødder, da består Galoisgruppen af alle permutationer af $\{1, \dots, n\}$. Det er kendt, at for $n \geq 5$ er denne gruppe af permutationer ikke opløselig. Dvs, de polynomier, der opfylder ovenstående ikke har rødder udtrykt ved rodtegn.

Eksempel

Det kan vises, at polynomiet $f(x) = x^5 - 4x + 2$ er irreducibelt.

Da $f(-\infty) < 0$, $f(0) = 2 > 0$, $f(1) = -1 < 0$ og $f(\infty) > 0$, ved vi, at $f(x)$ har mindst 3 reelle rødder.

Hvis $f(x)$ har 5 reelle rødder, må det differentierede polynomium have 4 reelle rødder. Tangenten til $f(x)$ skal jo i så tilfælde være vandret 4 gange. Det differentierede polynomium er givet ved $f'(x) = 5x^4 - 4$. Dette polynomium har præcis 2 reelle rødder, nemlig $\pm\sqrt[4]{4/5}$. Dvs., $f(x)$ har netop 3 reelle rødder.

Rødderne til $f(x)$ kan således ikke findes ved rodtegn. ◊