Kontrolassistenten

Poul Rose, Vordingborg

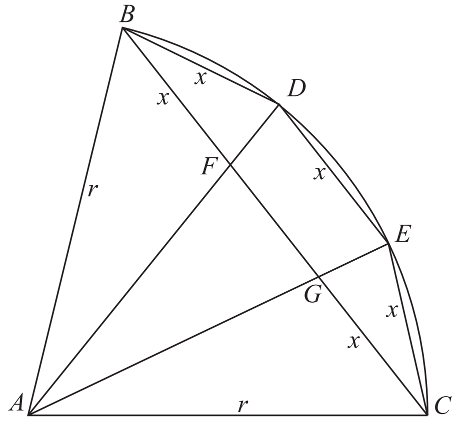
Han kom i hestevogn fra den foregående gård på ruten. Karle med muskler løftede det tunge grej ned fra ladet og bar det ind i bryggerset i gavlen af en længe. Det var et hvidkalket rum med skorsten i midten. På hver side af denne var der en indmuret gruekedel med ildsted under. Det var et bryggers, der svarede til sit navn. Her blev der brygget øl til eget brug. Men ikke i dag. Ud kom bødkerens frembringelser: tønder, gæringskar, øser og den halve tønde med spuns, hvor maltrester og humle blev fjernet fra øllet med et lag halm i bunden som filter. Ind kom mere forfinede instrumenter såsom reagensglas, pipetter og en centrifuge med svinghjul og håndsving.

Kontrolassistenten kom om eftermiddagen. Om aftenen var han ovre i kostalden, hvor børnene på gården sad og malkede med forventningsfulde katte i nærheden. Når en ko var malket færdig, vejede han spanden og udtog en prøve til bestemmelse af fedtprocent. Det samme gentog sig næste morgen. Han fik kost og logi, hvor han kom frem. Aftenen havde han tilbragt sammen med familien og karlene i folkestuen. Til daglig blev stuerne ikke brugt. Efter morgenmalkningen havde mændene travlt med at føre hestene ud til arbejde i marken og børnene skulle i skole, så han stod uforstyrret i bryggerset og lavede ting og sager med mælkeprøver, syre, pipetter og andre glasting, hvis navn ingen på gården kendte.

Senere kom den spændende centrifuge i anvendelse og da kunne det hænde, at enkelte børn dukkede op, for den gang gik de i skole på skift hver anden dag. Centrifugen var fast monteret i sin transportkasse, der var terningformet med et lille rundt hul, hvor en kantet tap stak frem til det løse håndsving. Da han åbnede låget, så man noget, der lignede en meget stor diskos, men den var hul og øverste del kunne fjernes. I nederste del sad en kreds af messingrør, der pegede mod ingenting i midten. De lignede i form og størrelse tomme patronhylstre fra et jagtgevær. Pludselig var de drejet i skrå stilling som kanoner. Med megen omhu satte han små gummipropper i de glas, han havde forberedt, hvorefter de blev stillet ned i de skrå rør med proppen øverst. Så klikkede han rørene ned i vandret stilling og satte dækslet tilbage. Med håndsvinget fik han med tunge drejninger sat gang i svinghjulet under diskos. Det kørte hurtigere rundt end håndsvinget og fortsatte, når han holdt op med at dreje, som en cykel, der kører videre, selv om pedalerne er standset. I flere minutter holdt han øje med det hvirvlende mønster af uregelmæssigheder i dækslets overflade. Når farten sagtnede, satte han igen håndsvinget på plads og drejede. Sådan fortsatte han indtil han var tilfreds. Så satte han glassene i stativ og studerede dem nøje, medens han gentagne gange holdt stativet op mod lyset og noterede tal på en lap papir. Derefter ryddede han op og hældte syreholdig væske ud på ukrudtet mellem de toppede brosten på gårdspladsen, hvilket de børn, der senere skulle luge pladsen, ikke var kede af.

Resten af formiddagen sad han i folkestuen med kontrolbogen foran sig på langbordet og skrev tal, der afgjorde, om en ko måtte få en kalv.

Om eftermiddagen blev fjedervognen gjort klar og han blev med alt sit grej kørt til næste gård på ruten, en udflyttergård, der lå hinsides de kileformede marker, der hørte til gårdene mellem kirken og åen. Han efterlod en ajourført kontrolbog, der kom på plads i stadsstuen mellem huspostillen fra 1800tallet og *Stambog over Heste af Jydsk Race*. Her stod i forvejen en stribe kontrolbøger fra tidligere år i solid indbinding med sort lærred og gyldne bogstaver. Alle med ubenyttede sider, hvilket børnene, der tegnede og fabulerede på alt ledigt papir, var glade for. Hvad der hav-



Figur 1

nede her, led ikke løsarks skæbne. Der var tegninger af skibe, dampmaskiner og fly, der på vej til Norge fra Tyskland fløj så lavt over markerne, at man kunne se piloten.

Der var også en geometrisk figur fra tiden på friskolens præliminærkursus 7 km borte. Den er i rentegnet udgave gengivet som figur 1. Her er den tilhørende tekst:

Vinkel *BAC* er den givne vinkel, fastlagt af radius r og korden *BC*, hvis længde betegnes med k. Bue *BC* tænkes delt i 3 lige store buer af punkterne *D* og *E*. Længden af korden *BD* betegnes med x. Periferivinklen *DBC* er lig centervinklen *BAD*. Vinkel *BDA* er en vinkel, der er fælles for trekanterne *BAD* og *DBF*. Så er de to trekanter ensvinklede – og begge ligebenede. Længden af liniestykket *BF* er lig x, og længden af liniestykket *FG* er lig k - $2x$. Længden af liniestykket *FD* betegnes med y. Så har man $\frac{x}{r} = \frac{y}{x}$, dvs. $y = \frac{x^2}{r}$. Trekant *ABD* er også ensvinklet med trekant *AFG*. Så har man $\frac{x}{r} = \frac{k\text{-}2x}{r\text{-}y}$. Heraf udledes $y = \frac{(3x\text{-}k)\cdot r}{x}$. Af de to udtryk for y fås: $x^3 = (3x - k)\cdot r^2$.

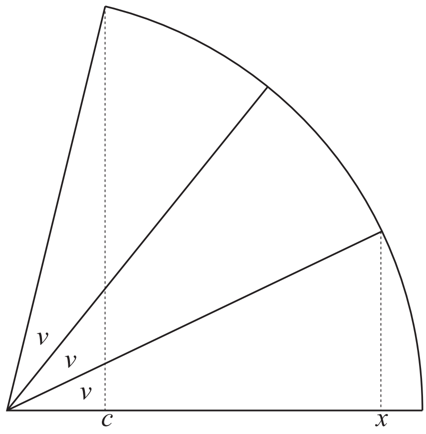
På venstre side er der 3 ens faktorer. På højre side er der 2 og en parentes, hvis indhold ikke bare er en formel regnestørrelse. Den har en klar geometrisk betydning. Her står jo, hvor meget omvejen *BDEC* er større end den direkte vej fra *B* til *C*. Det måtte kunne bruges til noget. Det var en så tillokkende mulighed, at jeg svigtede den fætter på ferie, der spurgte, om jeg ikke kom ud at lege. Til sidst gik jeg til matematiklæreren på friskolen. I den følgende tid spurgte han mig jævnligt, om jeg havde fået løst den tredjegradsligning. Det skete så ofte, at jeg begyndte at forstå, hvordan det er at være en elev, der ikke kan klare sin hjemmeregning. Så satte jeg kontrolbogen på plads, hvor den stod i mange år.

Bemærkning

Når enhedscirklen anvendes, ser ligningen sådan ud:

$$x^3 = 3x - k \qquad (1)$$

Dengang vidste jeg ikke, at man i 1500tallet hav-



Figur 2

de arbejdet med et ækvivalent spørgsmål: *Hvis man kender abscissen til retningspunktet for en given bue, hvad er så abscissen for retningspunktet for* $\frac{1}{3}$ *bue*. Se figur 2. Over for en målgruppe, der har kendskab til en hel del trigonometri, kan man fremdrage formlen $\cos(3v) = 4\cdot\cos^3(v) - 3\cdot\cos(v)$, der med symbolerne på figuren bliver til

$$c = 4x^3 - 3x \text{ eller } 4x^3 = 3x + c \qquad (2)$$

For at komme frem til ligning (1) kræves blot kendskab til reglen om ensvinklede trekanter.

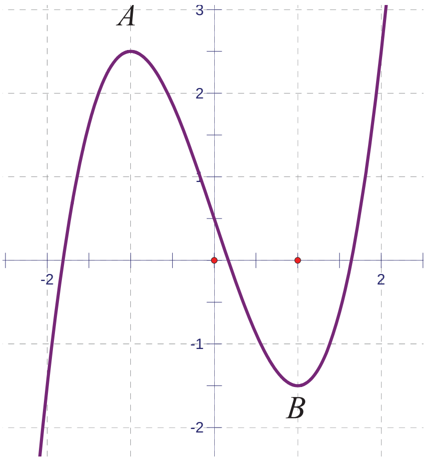
Graf

For et par år siden genså jeg kontrolbogen under oprydning og fik lyst til at undersøge grafen for funktionen $f(x) = x^3 - 3x + k$ for $k > 0$. Der er lokalt maksimum i punktet $A(-1, k + 2)$ og lokalt minimum i punktet $B(1, k - 2)$. Skitsen i figur 3 er karakteristisk for tilfældet $0 < k < 2$, hvor der er tre nulpunkter, herunder et mellem 0 og 1. For $k = 2$ ligger B på aksen og $x = 1$ er en dobbeltrod. For $k > 2$ ligger B over aksen og der er kun 1 rod, der er negativ.

Algebraiske løsninger

Rødderne kan findes med numeriske metoder, men hensigten var at finde et eksplicit, algebraisk udtryk for løsningen til ligning (l), der er en tredjegradsligning uden andengradsled.

I [1] er omtalt en metode til løsning af sådanne ligninger uden at anvende Cardanos lange formel. Man indfører en ny variabel z ved hjælp af udtrykket: $x = z + q\cdot\frac{1}{z}$, hvor q er en konstant, som der er en særlig formel for. Den formel slæber jeg



Figur 3. $k = \frac{1}{2}$.

ikke rundt med i hukommelsen, for q's talværdi kan man ofte vurdere sig til. For ligning (1) blev det særligt simpelt, nemlig $q = 1$. I (1) erstattes x med $z + \frac{1}{z}$:

$$\left(z + \frac{1}{z}\right)^3 = 3 \cdot \left(z + \frac{1}{z}\right) - k.$$

Dette kan reduceres til

$$z^3 + \frac{1}{z^3} = -k \text{ eller } z^6 + k \cdot z^3 + 1 = 0$$

Så kan man finde et eksplicit udtryk for z^3:

$$z^3 = \frac{-k \pm \sqrt{k^2 - 4}}{2}.$$

Hvis man inddrager den komplekse plan, gælder den fundamentale regel, at der er 3 løsninger for z.

Tilfældet $k \geq 2$

Ligning (1) kan løses. Her er z^3 lig et negativt reelt tal, der i den komplekse plan har argumentet 180°. Så kan man komme frem til eksplicitte udtryk for z, fordi det er muligt at tredele en vinkel på 180°. Herfra kan man komme videre til algebraiske udtryk for x. Undervejs kan man have brug for omskrivningen

$$x = z + \frac{1}{z} = a + ib + \frac{1}{a + ib} = a + ib + \frac{a - ib}{a^2 + b^2},$$

der er lig $2a$, hvis z ligger på enhedscirklen i den komplekse plan.

Et konkret eksempel: Hvis $k = 2$, er $z^3 = -1$. Løsningsmængden for denne ligning er:

$$\left\{ -1, \frac{1}{2} + i \cdot \frac{1}{2}\sqrt{3}, \frac{1}{2} - i \cdot \frac{1}{2}\sqrt{3} \right\}.$$

Heraf fås løsningsmængden for (1): $\{-2, 1\}$. Det er de komplekse værdier af z, der fører til den reelle dobbeltrod 1. Roden 1 er selvfølgelig et forventet resultat. –2 er en fremmedrod.

Hvis $k > 2$, ligger z-værdierne ikke på enhedscirklen. Der fremkommer én reel løsning for x og to komplekse i overensstemmelse med kurveundersøgelsen.

Tilfældet $0 < k < 2$

Ligning (1) kan i almindelighed ikke løses algebraisk. Diskriminanten ovenfor er negativ, men alligevel er der 3 reelle rødder ifølge kurveundersøgelsen.

Når z^3 er kompleks, kan man i almindelighed kun komme frem til eksplicitte udtryk for z, hvis man med algebraiske metoder kan tredele vinklen mellem den reelle akse og stedvektoren til det komplekse tal z^3. Sagen kører i ring. Et problem i Euklids plan er blevet til et tilsvarende problem i den komplekse plan.

Desværre svarer uligheden $k < 2$ netop til, at korden i det oprindelige problem er mindre end diameteren. Ligning (1) for $k < 2$ er nok af den type, der på side 191 i [1] kaldes *irreducibel*.

Alt i alt: Ligningen $x^3 = 3x - k$ kan man løse algebraisk for enhver værdi af k, der er større end eller lig 2, men ikke for de værdier af k, der oprindelig havde interesse.

Der er en undtagelse. Ligningen kan løses for $k = \sqrt{2}$, hvilket i Euklids plan er korden til en bue på 90°. Her kendes resultatet på forhånd: Det er korden til en bue på 30°. Her er

$$z^3 = \frac{-\sqrt{2} \pm i\sqrt{2}}{2},$$

der i den komplekse plan ligger på enhedscirklen. Jeg har gennemført beregningerne og meddeler blot resultatet: Ligningen $x^3 = 3x - \sqrt{2}$ har løsningsmængden

$$\left\{ -\frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{2}, \sqrt{2}, \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{2} \right\}.$$

Der er to fremmedrødder. Man udvælger den positive, der er mindre end korden. Det er den sidste, der netop er lig længden af korden til en bue på 30°, idet

$$\sin(15°) = \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}.$$

◊

[1] *Ligningernes historie fra Babel til Abel*
Redaktør: Kirsti Andersen. Preprint.
Aarhus Universitet. 1985.