Projekter og temarapporter i matematik

BJØRN GRØN, fagkonsulent i matematik

I nedenstående artikel henvises til nogle bilag, som er lagt på emu'en sammen med en version af artiklen.

Prøveform c er en mellemting mellem prøveform a og prøveform b. Derfor dækker undervisningsvejledningens afsnit om projektarbejde og rapporter i matematik også prøveform c, ligesom eksempler på eksamensspørgsmål til mundtlig prøve kan fås ved at kombinere de eksempler, der ligger på emu'en vedr. prøveform a og b.

Men der kan alligevel være grund til at sige noget om selve kernen i dette, nemlig projektarbejde i matematik. Da eksamensafdelingen har indført, at alle hold, der er startet på en ungdomsuddannelse ved skoleårets start sommer 2008 skal følge prøveform c, er det en opgave for rigtig mange lærere at få styr på dette. Selv om prøveformen ikke i sig selv rummer så meget nyt – læreplanerne taler i forvejen om, at en del af undervisningen skal tilrettelægges som projektforløb – så er det måske alligevel nyt for mange. EVA's anbefaling overfor ministeriet om, *at de to mundtlige prøveformer – prøveform a) og b) – kombineres, så der ved den samme prøve bliver mulighed for at trække spørgsmål af den ene eller den anden type*, var i alt fald begrundet i, at de gennem samtaler med lærere fik den opfattelse, at man mange steder ikke arbejdede med projektformen.

Jeg har ingen statistik for, hvor stort dette problem har været. Har EVA taget fejl og problemet været af diminutiv karakter, så skulle der jo heller ikke være problemer med at indføre prøveform c) – men reaktionerne fra kollegerne tyder på, at EVA havde ret.

Vi har været vant til, at alt vedrørende undervisningens tilrettelæggelse lå som råd og vink i undervisningsvejledningen. Nu ligger der en stor del i læreplanerne, dvs. det er ikke et *kan*, men et *skal*. Og her som på andre felter er eksamen redskabet til at sikre, det sker.

I konsekvens af ovenstående medgiver jeg gerne kollegerne, at der tidligt i skoleåret burde have ligget flere konkrete eksempler på, hvordan man kan arbejde med projekter i matematik, så det ikke bliver en ekstra tidsrøver, men tværtimod bliver en fornuftig måde at strukturere en del af undervisningen på. Prøveformen blev imidlertid indført så sent, at det ikke var muligt at frigøre tid til dette, endsige lave særlige møder herom.

Nedenstående vil derfor – sammen med en generel artikel herom i bladet – indgå i diskussionen på årsmødet og på regionalmøderne i november.

Projekter i matematik

Et projekt i matematik er normalt anderledes end projekter i andre fag. Har man ikke læst afsnittene herom i undervisningsvejledningerne, anbefales det at starte dér. I alle 5 vejledninger hedder det, at et projektforløb i matematik s*tarter med en problemformulering, eleven / kursisten arbejder selvstændigt undervejs, og det slutter med et produkt*. Dette er ikke så forskelligt fra andre fag – men så siger vi også, at det i matematik *ofte vil være en fordel, at læreren på forhånd har udarbejdet problemformuleringen*, og hermed sikrer en stram styring af projektet. Der findes emner (f.eks. visse statistiske emner, visse eksperimenterende forløb), hvor det også i matematik vil være mest rigtigt at lade eleverne selv udarbejde hver deres problemformulering, da dette er en del af selve projektet. Men det er ikke det normale.

Der skal nok findes andre fag, som mener, at det stramt styrede ikke er et projekt. Det skal vi ikke tage os af – ingen har monopol på terminologien. Men fremmer det forståelsen bør vi overveje en ændring af sprogbrugen.

Projektarbejde i matematik er ikke et snævert gymnasialt fænomen. På de fleste matematiske institutter spiller projektarbejdsformen i dag en betydelig rolle. Projekter på universiteterne er normalt stramt styrede, men kan også indeholde åbne spørgsmål af mere udfordrende karakter. Nogle steder anvendes en anden terminologi, som vi også i gymnasiet kunne overveje at indføre, for bedre at beskrive det, projekter normalt er i vores fag.

Matematik

Eksempel fra mat 2AN på KU

Kurset mat 2AN på KU er struktureret således, at studenterne udformer deres eget pensum til mundtlig eksamen i form af *6 temarapporter*. Disse 6 temarapporter er studenternes besvarelse af 6 temaopgaver, der stilles ved kursets start. Temaopgaverne dækker kursets faglige indhold, og besvarelserne bygger på stof fra forelæsninger, fra lærebøger og fra øvelsestimer. Temaopgaverne udgør på 2AN eksamensspørgsmålene, så den studerende skal selv evne at vælge emner ud til sin egen præsentation.

Temarapporterne betyder, at de studerende får større ejerskab til det faglige stof, og at forberedelsen til den mundtlige prøve foregår gennem hele kursusforløbet.

En temarapport består af en overskrift, en række faglige spørgsmål, samt nogle overordnede kompetencemål. Eksempler på overskrifter kan være: 'Cantors mængde', 'Uniform kontinuitet og kompakthed' og 'Ombytning af grænseovergange'. Eksempler på faglige spørgsmål til det sidste emne kan være:

- redegør for, hvad der forstås ved begrebet
- giv eksempler på, hvor det er muligt at ombytte, og hvor det går galt
- gennemfør mindst ét bevis og mindst én nedskydning af følgende hypoteser: ...
- formuler og vis sætningen om ledvis differentiation og integration
- giv eksempler ...
- ...

Dette er efter min opfattelse en god model for projekter/temaopgaver i matematik i gymnasiet og på hf. Man behøver naturligvis ikke organisere hele pensum i temaopgaver som på 2AN – prøveform c bygger netop på en kombination af de traditionelle kursusforløb og projektforløb.

Det kan illustreres med de følgende eksempler. Man kan vælge at formulere hele temaet som én opgave, eller klippe noget ud til almindelige kursusforløb. Men kan vælge at lade dem aflevere i flere tempi, så rapporten efterhånden stykkes sammen. Man kan vælge selv at rette noget af det, og lade eleverne præsentere andet af stoffet for hinanden i et pararbejde.

Eksempel 1a

Emne: Trigonometri (C-niveau)

Faglige spørgsmål:

- Redegør for ensvinklede trekanter og giv eksempler på beregninger heri.
- Redegør for definitionen af sinus, cosinus og tangens (*Kommentar: Kan være indført som forholdet mellem ensliggende sider*).
- Opstil ud fra definitionen de trigonometriske formler til beregning af ukendte sider og vinkler i retvinklede trekanter.
- Demonstrer hvorledes man beregner ukendte sider og vinkler i en retvinklet trekant, se bilag... (*Kommentar: Dette element sikrer, at der i arbejdet med temarapporten også gennemføres opgavetræning*).
- Redegør for hvorledes man ved opstilling af geometriske modeller og anvendelse af trigonometri kan gennemføre højde- og afstandsbestemmelse, se bilag... (*Kommentar: Dette kunne dels indeholde løsning af lidt mere komplekse opgaver, dels være en øvelse, hvor eleverne selv skulle måle og bestemme højde af bygninger tæt ved, og af bygninger, hvor der er forhindringer, samt hvor eleverne ud fra usikkerhedsberegninger skulle give et bud på det bedste sted at foretage vinkelmålingen fra. Sidstnævnte del kunne med fordel gennemføres i et dynamisk geometriprogram.*)

Generel kommentar: Temaopgaven kunne i alle beregninger integrere brugen af et dynamisk geometriprogram.

Eksempel 1b

Emne: Trigonometri (B-niveau)

Faglige spørgsmål:

- Redegør for definitionen af sinus og cosinus ud fra enhedscirklen.
- Opstil formlerne til trigonometriske beregninger i retvinklede trekanter og illustrer selv med eksempler.
- Bevis sinusrelationerne samt arealformlerne i spidsvinklede trekanter.
- Bevis cosinusrelationerne i spidsvinklede trekanter.
- Demonstrer hvorledes man beregner ukendte sider og vinkler i spidsvinklede trekanter, se

bilag ... (*Kommentar: dette element sikrer, at der i arbejdet med temarapporten også gennemføres opgavetræning*).

- Redegør for formlerne cos(180°-v)) = -cos(v) og sin(180°-v)) = sin(v), og anvend disse til at vise sinus-relationerne eller cosinus-relationerne i en stumpvinklet trekant. Forklar, hvad "sinus-fælden" er, og demonstrer det geometriske indhold heri ved konstruktion i (et dynamisk geometriprogram). (*Kommentar: Denne del kunne udbygges dels ved at inddrage cosinus-relationerne som 2. gradsligninger, dels ved at lade dem undersøge betingelserne for og entydigheden af en trekantskonstruktion ud fra tre givne stykker.*).
- Demonstrer, hvorledes man beregner sider og vinkler i vilkårlige trekanter, se bilag ... (*Kommentar: Dette element sikrer, at der i arbejdet med temarapporten også gennemføres opgavetræning. Opgavebilaget indeholder opgaver med 2 løsninger*).
- Giv et kort referat af artiklen om landmåling og forklar fremgangsmåden ud fra vedlagte bilag (*Kommentar: Dette kunne inkludere et materiale fra et AT-forløb, hvor matematik deltog, og hvor der blev anvendt geometri. Derved dækkes samtidig noget supplerende stof om det historiske element. Det kunne lige så godt være et forløb om navigation eller om verdensbilleder og astronomiske afstandsbestemmelser*).

Vækstmodeller, funktioner og variabelbegrebet

Forud for forløb om vækstmodeller og om funktionstyper i øvrigt ville jeg selv have gennemført et forløb over variabelbegrebet og variabelsammenhænge generelt. Det giver en fornemmelse af, hvor stærke/svage de er til at håndtere grafiske fremstillinger og giver en mulighed for igen at præsentere den grundlæggende matematisk metode – når man står overfor et svært og komplekst problem, som dette at forstå variabelsammenhænge, starter man med at formulere et beslægtet, men lettere og mere enkelt problem, som variabelsammenhænge hvor der kun er én uafhængig variabel i spil. I bilag 1 er vist et eksempel på en lille temaopgave om dette emne – som er klippet ud fra et introduktionsmateriale til hf C, der kan findes i sin helhed på adressen: *www.emu.dk/gym/fag/ma/undervisningsforloeb/hf-mat-c/Introduktion.doc.*

Eksempel 2a

Emne: Lineære og eksponentielle vækstmodeller (C-niveau)

Faglige spørgsmål:

- Redegør for formlen $K = K_0\ (1 + r)^n$, og giv selv eksempler på beregninger af ukendte størrelser med brug af formlen.
- Redegør for karakteristiske træk ved lineær og eksponentiel vækst, samt for konstanternes betydning for de grafiske forløb.
- Vis, hvorledes man udregner formlen for hældningskoefficienten a i $y = ax + b$ ud fra to kendte værdier, og opstil den generelle formel (*Kommentar: I nogle klasser ville jeg sige: vis den generelle formel*).
- Vis, hvorledes man udregner formlen for fremskrivningsfaktoren a i $y = ba^x$ ud fra to kendte værdier, og opstil den generelle formel (*Kommentar: I nogle klasser ville jeg sige: vis den generelle formel*).
- Demonstrer, hvorledes man opstiller og fortolker lineære og eksponentielle sammenhænge, samt hvorledes man løser enkle opgaver grafisk og ved beregning (*Kommentar: både n-te rod og logaritmefunktioner indføres på C som rene beregningstekniske værktøjer*).
- Redegør for T_2 og $T_{½}$.
- Giv en kort fremstilling af ideen i regression og gennemgå derefter så mange som muligt af de 6 større øvelser i bilag... (*Kommentar: Eksempler på en sådan samling større øvelser er vedlagt som bilag 2. De er klippet fra ovennævnte introduktionsmateriale til matematik C og fra Thomas Vils: Vækst, der både fås i bogform og som ligger blandt de paradigmatiske eksempler (det er nr 201) på adressen: www.emu.dk/gym/fag/ma/undervisningsforloeb/paradigmatiske/indeks.html.*)

Eksempel 2b

Emne: Lineære og eksponentielle vækstmodeller (B-niveau)

Faglige spørgsmål:

- Redegør for karakteristiske træk ved lineær og eksponentiel vækst, samt for konstanternes betydning for de grafiske forløb.
- Udled ud fra to kendte værdier formlerne for henholdsvis hældningskoefficienten a i $f(x) = ax + b$, og for fremskrivningsfaktoren a i $y = ba^x$.
- Demonstrer, hvorledes man opstiller og fortolker lineære og eksponentielle sammenhænge, samt hvorledes man løser enkle opgaver grafisk og ved beregning.
- Redegør for T_2 og $T_{½}$ og udled en af formlerne.
- Redegør for, hvorledes de karakteristiske træk ved vækstmodellerne kan beskrives og analyseres ved hjælp af differentialregning. Redegør for sammenhængen mellem a^x og e^{kx}.
- Giv en kort fremstilling af ideen i regression og gennemgå derefter så mange som muligt af (et antal øvelser, hvor C-typerne er udbygget med typer, hvor differentialregningen anvendes naturligt).

Generel kommentar: Løsningerne af de forskellige spørgsmål ville naturligt inddrage cas-værktøjet.

På A-niveau ville man naturligvis inddrage differentialligninger i dette team og udbygge med logistisk vækst og evt. andre vækstmodeller.

I den udstrækning faget er med i et samarbejde med andre fag, bør de faglige elementer heri så vidt muligt integreres i tema-opgaver. Det vil fx af og til være tilfældet med vækstmodeller. På den måde kan flere elementer af læreplanen dækkes på en gang, samtidig med at der bliver en god sammenhæng i faget. ◊