Skriftlig matematik

STEEN TOFT JØRGENSEN, Helsingør Gymnasium

"Eksamensbekendtgørelsen lovliggør anvendelse af PC til skriftlig eksamen med brug af matematikprogrammer til besvarelsen. Jeg kan bare ikke se, at IT-brugen afspejler sig i de faktiske stillede eksamensopgaver."

Jeg er matematiklærer for en 1g mat-B klasse og en 2g mat-A klasse samt skriftlig censor i matematik. Årsagen til min artikel er, at jeg ser en stor forskel på matematik i teorien og i praksis. Fagbilaget og vejledning taler om kraftig brug af IT i matematik-undervisningen (projekter og opdagelser) og kræver elevadgang til CAS (lommeregner eller PC). Eksamensbekendtgørelsen lovliggør anvendelse af PC til skriftlig eksamen med brug af matematikprogrammer til besvarelsen.

Jeg kan bare ikke se, at IT-brugen afspejler sig i de faktiske stillede eksamensopgaver. Nu er det sådan, at det mest styrende redskab i praksis ved skriftlig eksamen ikke er fagbilag og vejledning men de vejledende og tidligere stillede eksamensopgaver!

En opgave for fagkonsulenten, opgavekommissionen og Matematiklærerforeningen:

Jeg mærker ved snak med kolleger og medcensorer, at det er som om, man ikke rigtig giver fuld points for 'ikke-klassiske' besvarelser. De traditionelle besvarelser fornemmes ligesom at være 'finere'. Det bekymrer mig, da jeg forsøger at følge intensionerne i vejledningen mm. Som lærer med gode IT-kompetencer inddrager jeg naturligvis brugen af PC med diverse software i undervisningen. Og jeg lægger meget vægt på, hvordan man skriver en ordentlig besvarelse, når man bruger IT-værktøjer til at løse opgaven.

Mine elever skal vel ikke have dårlige karakterer, fordi mange eksamensopgaver let kan løses med IT, og en censor indirekte forventer at der "regnes".

Jeg mener, at der fremstår en vigtig opgave for fagkonsulenten, opgavekommissionen og Matematiklærerforeningen:

- Offentliggørelse af gode besvarelser på f.eks. vejledende eksamensopgavesæt.
- Offentliggørelse af besvarelser, som anvender forskellige IT-værktøjer, og hvor der lægges vægt på ordentlig dokumentation.
- Ændring af de stillede eksamensopgaver, så de tager højde for IT (CAS). Nogle typer må udgå pga. trivialitet, når IT er tilladt, og der bør afprøves mere åbne opgavetyper.

Offentliggørelse bør naturligvis ske på Internettet i form af PDF-filer. Enten på *uvm.dk* eller EMU'en.

To besvarelser

Nedenfor har jeg lavet besvarelser af 2 opgaver, som jeg stillede i sommer til årsprøven i 1g. Jeg har lagt vægt på følgende:

- Besvarelsen skelner skarpt mellem forklaringer (matematik) og værktøjer (udklip).
- Besvarelserne viser forskellige måder at besvare en opgave: traditionelt ved regning kombineret med lidt beregninger med lommeregneren, samt ved brug af IT-værktøjer.

Jeg håber, at mit indlæg vil føre til den debat, som jeg savner.

Opgave A
(Vejledende opgavesæt stxB opgave 8.007)

Bestem løsningen til ligningssystemet

$$3x + 4y = 10$$
$$4x - 3y = 5$$

SVAR PÅ OPGAVE A

Metode 1 (traditionel):

Ligningssystemet løses ved lige store koefficienters metode:

$$\begin{aligned} & 3x + 4y = 10 \wedge 4x - 3y = 5 \\ \Leftrightarrow\ & 12x + 16y = 40 \wedge 12x - 9y = 15 \\ \Rightarrow\ & 16y - (-9y) = 40 - 15 \\ \Leftrightarrow\ & y = 1 \end{aligned}$$

Denne værdi indsættes i en af ligningerne, så x kan bestemmes:

$$4x - 3y = 5 \Rightarrow 4x - 3 \cdot 1 = 5 \Leftrightarrow 4x = 8 \Leftrightarrow x = 2$$

Dvs. løsningen er: $x = 2$ og $y = 1$.

Matematik

Metode 2 (brug af TI-89):

Løses opgaven med TI-89's *solve*-funktion, får man:

Indtastning:

$$\boxed{\text{solve(3x+4y=10 and 4x-3y=5, x)}}$$

TI-89 giver: $\boxed{x = 2 \text{ and } y = 1}$

Dvs. løsningen er: $x = 2$ og $y = 1$.

Metode 3 (brug af GeoGebra – interaktivt geometriprogram):

I GeoGebra indtegnes de 2 linjer ved blot at skrive ligningerne forneden i indtastningsfeltet:

Konstruktionsbeskrivelse

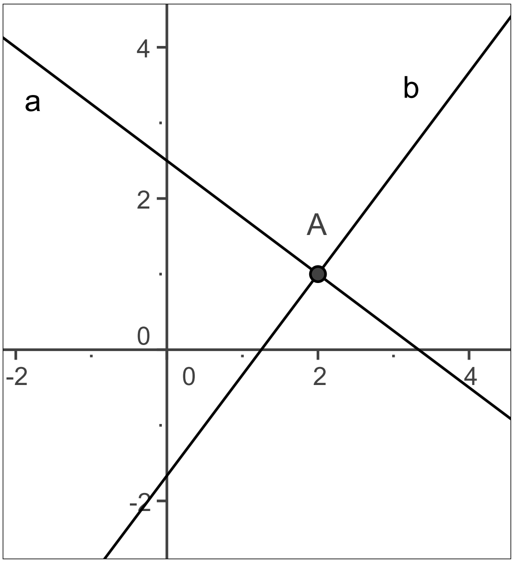
Fil Vis Hjælp

Nr.	Navn	Definition	Algebra
1	Linje a		a: 3x + 4y = 10
2	Linje b		b: 4x - 3y = 5
3	Punkt A	skæringspunktet mellem a, b	A = (2, 1)

Frie objekter
- a: 3x + 4y = 10
- b: 4x - 3y = 5

Afhængige objekter

Hjælpe objekter
- A = (2, 1)



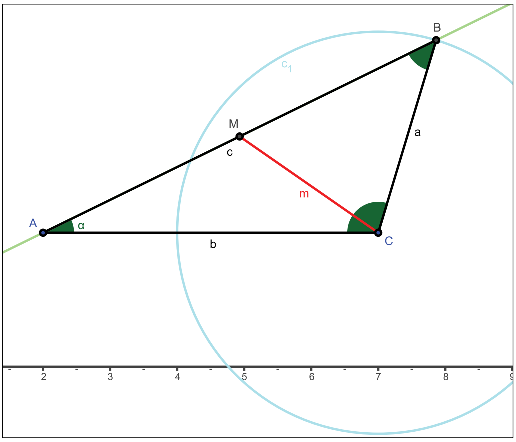
Skæringen mellem de 2 linjer findes så til (2,1). **Dvs. $x = 2$ og $y = 1$.**

> **Opgave B**
> **(Vejledende eksamensopgavesæt HF B sommer 2006 opgave 3 – uden figur)**
> I trekant *ABC* er givet følgende oplysninger:
> $\angle A = 26.1°$ og $|AC| = 5.0$ og $|BC| = 3.0$
> Vinkel *C* vides at være stump.
> a) Bestem vinklerne *B* og *C*.
> b) Bestem længden af siden $|AB|$.
> c) Bestem længden af medianen m_C.

Svar på opgave B:

Metode 1 (brug af *GeoGebra* – interaktivt geometriprogram):

Anvendes programmet *GeoGebra*, kan trekanten konstrueres, og de ønskede størrelser kan måles med programmet:



Konstruktionsbeskrivelse

Fil Vis Hjælp

Nr.	Navn	Definition	Algebra
1	Punkt A		A = (2, 2)
2	Punkt C		C = (7, 2)
3	Cirkel c_1	Cirkel med centrum C og	c_1: $(x - 7)^2 + (y - 2)^2 = 9$
4	Punkt E	C drejet med vinklen 26.1°	E = (6.49, 4.2)
5	Vinkel α	Vinkel mellem C, A, E	α = 26.1°
6	Linje f	Linje gennem A, E	f: -2.2x + 4.49y = 4.53
7	Linjestykke b	Afsnit[A, C]	b = 5
8	Punkt B	skæringspunktet mellem c_1,	B = (7.86, 4.87)
8	Punkt D	skæringspunktet mellem c_1,	D = (4.2, 3.08)
9	Linjestykke a	Afsnit[C, B]	a = 3
10	Linjestykke c	Afsnit[A, B]	c = 6.53
11	Punkt M	midtpunkt på A, B	M = (4.93, 3.44)
12	Linjestykke m	Afsnit[M, C]	m = 2.52
13	Vinkel β	Vinkel mellem A, B, C	β = 47.16°
14	Vinkel γ	Vinkel mellem B, C, A	γ = 106.74°

a) b) c)
Dvs., at $c = |AB| = 6.53$ og $\angle B = 47.16°$ og $\angle C = 106.74°$ og medianen $m_C = 2.52$.

Metode 2 (brug af Excel-udvidelse):

Jens Runges Excel-udvidelser anvendes.
a) b)
ΔABC:
NB: de blå tal er de 3 givne størrelser, de røde tal er beregningerne fra Jens Runge.

A	B	C
26,1	47,15803	106,742
3	5	6,530074
a	b	c

Her er vinkel B *ikke* stump, når C er det.
Dvs., at $c = |AB| = 6.53$ og $\angle B = 47.16°$ og $\angle C = 106.74°$.

c)
$$|AM| = \frac{1}{2}|AB| = \frac{c}{2} = \frac{6{,}530074}{2} = 3{,}265037.$$

ΔAMC:

A	M	C
26,1	119,1152	34,78477
2,517843	5	3,265037
MC	AC	AM

Dvs. medianen $|MC| = m_C = 2.52$.

Metode 3 (traditionel):

Regneopgaven med sinus/cosinus-formlerne for en generel trekant:
a)
NB: Når $\angle C$ er stump, er $\angle B$ spids, dvs. under 90°.
Sinus-relationen på ΔABC:

$$\frac{\sin(A)}{a} = \frac{\sin(B)}{b} \Rightarrow \frac{\sin(26.1°)}{3.0} = \frac{\sin(B)}{5.0}$$
$$\Leftrightarrow$$
$$\sin(B) = \frac{\sin(26.1°)}{3.0} \cdot 5.0$$

$$\Rightarrow \quad B = \sin^{-1}\left(\frac{\sin(26.1°)}{3.0} \cdot 5.0\right) = 47.158°$$
dvs. $B = 47.16°$

$\angle C$ findes så med vinkelsummen = 180°:
$\angle C = 180° - 26.1° - 47.16° = 106.74°$.

b)
Sinus-relationen på ΔABC :

$$\frac{\sin(A)}{a} = \frac{\sin(C)}{c} = \frac{\sin(26.1°)}{3.0} = \frac{\sin(106.74°)}{c}$$
$$\Leftrightarrow$$
$$c = \frac{3.0 \cdot \sin(106.74°)}{\sin(26.1°)}$$
$$\Leftrightarrow$$
$$c = 6.53014$$
Dvs. siden $c = |AB| \approx 6.53$

c)
Da M er midtpunkt af A og B, gælder at:

$$|AM| = \frac{1}{2}|AB| = \frac{1}{2} \cdot 6.53014 = 3.26507$$

Cosinus-relationen på ΔAMC:

$$m^2 = b^2 + |AM|^2 - 2 \cdot b \cdot |AM| \cdot \cos(A)$$
$$\Rightarrow$$
$$m = \sqrt{5.0^2 + 3.26507^2 - 2 \cdot 5.0 \cdot 3.26507 \cdot \cos(26.1°)}$$
$$\Leftrightarrow$$
$$m = 2.51783$$
Dvs. medianen $m \approx 2.52$. ◊

Den skriftlige prøve

Til den skriftlige prøve gives der 4 timer. Det skriftlige eksamenssæt består af opgaver stillet inden for kernestoffet og skal evaluere de tilsvarende faglige mål, beskrevet i pkt. 2.1. Den første del af sættet skal besvares uden hjælpemidler. Til denne del af prøven gives der 1 time, hvorefter besvarelsen afleveres. Under den anden del af prøven må eksaminanden benytte alle hjælpemidler, bortset fra kommunikation med omverdenen. Opgaverne til denne del af prøven udarbejdes ud fra den forudsætning, at eksaminanden råder over CAS-værktøjer, der kan udføre symbolmanipulation, jf. pkt. 3.3. *(Fra Læreplan, Bilag 36 – matematik B)*