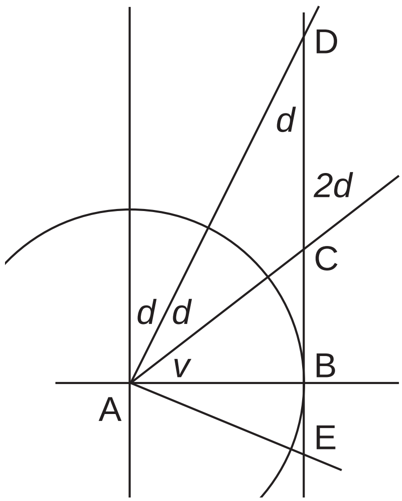
Geometrisk bevis i første kvadrant

Poul Rose, Vordingborg

I LMFK-bladet nr. 4, 2007, påviste Poul Rose formlen formlen $\tan(v + d) = \tan(d) + 2 \cdot \tan(v)$, hvor $d = \frac{1}{2} \cdot (90 - v)$. Her følger et geometrisk bevis.

Nøgleformlen i min artikel i LMFK-bladet nr. 4 kan i første kvadrant bevises ved figurbetragtning, hvilket måske kan have interesse af didaktiske grunde. Betragt følgende skitse med den klassiske geometris briller, selv om et koordinatsystem er antydet. Cirklens radius er lig 1.



Den givne vinkel CAB betegnes med v. Definition af d: $d = \frac{1}{2} \cdot (90 - v)$. Går ud fra, at fremkomsten af punkterne A, B, C, D står klart. Konstruktion af punkt E: Sæt passerspids i punkt C og tegn en tænkt cirkelbue med AC som radius til skæring med lodret tangent.

Da de to lodrette linier er parallelle, er vinkel ADC lig d. Vinkel ACE er lig $2d$.

Betragt de to ligebenede trekanter ACD og ACE. Liniestykket CD kan dække liniestykket AC, der kan dække liniestykket EC. Kort skrevet: CD = EC.

Betragt figuren: $BD = BC + CD = BC + EC$. Da EC = EB + BC, fås: BD = BC + EB + BC, dvs. BD = EB + 2 · BC eller $\tan(v + d) = EB + 2 \cdot \tan(v)$.

Nu kommer det afgørende: Vinklen d dukker op i 4. kvadrant! For første gang skal vi ligefrem regne lidt: Hvad er vinklerne ved grundlinien i en ligebenet trekant, hvor topvinklen er $2d$?

Det er trekant ACE, jeg tænker på. Vinkel AEC er lig $90 - d$. Så er vinkel BAE lig d og EB er lig $\tan(d)$. Alt i alt: $\tan(v + d) = \tan(d) + 2 \cdot \tan(v)$, hvilket skulle vises. ◊

Lad x være en vinkel i første kvadrant. Mit mål er at komme frem til et udtryk for $\tan(x + d)$, hvor d er det halve af forskellen mellem 90 og x, dvs. $2d = 90 - x$. Så er $x = 90 - 2d$ og $x + d = 90 - d$. I den almene formel: $(1 - \tan(x)\cdot\tan(y))\cdot\tan(x + y) = \tan(x) + \tan(y)$ sættes $x = 90 - 2d$ et enkelt sted på venstre side og $y = d$ overalt. Så fås: $(1 - \tan(x)\cdot\tan(d))\cdot\tan(90 - 2d + d) = \tan(x) + \tan(d)$. Dvs.

$$(1 - \tan(x)\cdot\tan(d))\cdot\tan(90 - d) = \tan(x) + \tan(d).$$

Når man ganger ind i parentesen på venstre side, støder man på udtrykket $\tan(d)\cdot\tan(90 - d)$, der er lig 1. Så får man:

$$\tan(90 - d) - \tan(x) = \tan(x) + \tan(d), \text{ hvilket giver } \tan(90 - d) = \tan(d) + 2\cdot\tan(x).$$

Da $90 - d = x + d$, kan man skrive

$$\tan(x + d) = \tan(d) + 2\cdot\tan(x),$$

Fra Poul Roses artikel i LMFK-bladet nr, 4. side 20.