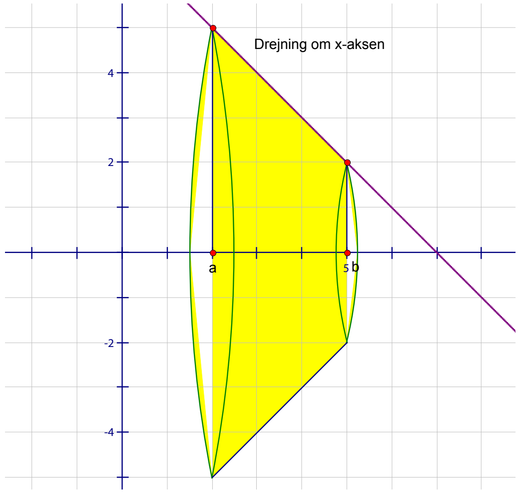
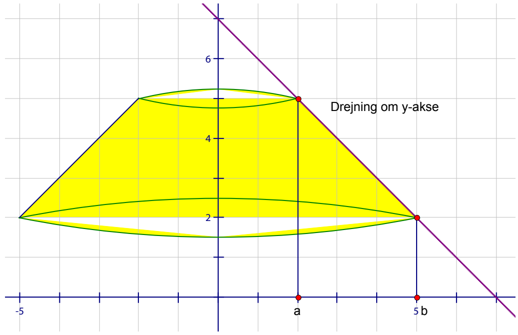
Omdrejningslegemer og Wikipedia

Mogens Thorborg, Sankt Annæ Gymnasium

I Wikipedia kan man finde mange matematiske emner, men behandlingen er ikke altid fejlfri, som det påvises i denne artikel.





I forbindelse med et AT-projekt havde nogle af mine elever for nylig brug for at finde volumen af et omdrejningslegeme, hvor en given funktion blev drejet 360° om y-aksen. De benyttede så web-leksikonet *Wikipedia* og præsenterede mig for en formel, som jeg ikke mindedes at have set før, så jeg måtte jo så selv ind på Wikipedia, hvor jeg i den danske udgave fandt det, som er vist i rammen nederst på siden.

Som det fremgår, udmærker dette indlæg sig ikke ved særligt udførlige forudsætninger om funktionen $f(x)$. Hvis vi kræver, at $f(x)$ skal være kontinuert for at sikre integrabiliteten, er det oplagt, at $f(x)$ desuden skal være monoton, hvis det skal give mening at dreje den omkring y-aksen. Lad os undersøge, hvordan de to formler fungerer i praksis på et meget simpelt eksempel. Vi vælger en funktion, der er sin egen inverse, således at det skal give samme volumen ved drejning om x-aksen og drejning om y-aksen.

Omdrejningslegeme

Fra Wikipedia, den frie encyklopædi

Et **omdrejningslegeme** er et matematisk begreb, der betegner det rumlige objekt, som fremkommer, hvis man drejer grafen for en funktion 360 grader rundt om enten x-aksen eller y-aksen.

Rumfanget V af et omdrejningslegeme til en ikkenegativ funktion f, der er defineret på intervallet $[a;b]$ og roteres om x-aksen, er givet ved

$$V = \int_a^b \pi(f(x))^2 \, dx$$

Rumfanget for en funktion af samme type, der i stedet roteres om y-aksen, er givet ved

$$V = \int_a^b 2\pi x f(x) \, dx$$

Funktionen er $f(x) = -x + 7$ i intervallet $[a;b] = [2;5]$, og de to volumener bliver da:

$$V_x = \int_a^b \pi \cdot (f(x))^2 \, dx = \int_2^5 \pi \cdot (-x+7)^2 \, dx = 39\pi$$

$$V_y = \int_a^b 2\pi \cdot x \cdot f(x) dx = \int_2^5 2\pi \cdot x \cdot (-x+7) dx = 69\pi$$

Hovsa, – to forskellige resultater, det var jo ikke så godt ! Omdrejningslegemet bliver en keglestub, så for en sikkerheds skyld kontrollerer vi lige, at det selvfølgelig er det første af resultaterne, der er det korrekte:

$$\begin{aligned} V &= \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot h \cdot (r^2 + R^2 + r \cdot R) \\ &= \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot 3 \cdot (2^2 + 5^2 + 2 \cdot 5) = 39\pi \end{aligned}$$

Formlen for drejning om y-aksen fra det danske Wikipedia gælder åbenbart ikke i dette tilfælde, men vi kan jo så kigge lidt ud i den store verden, og på den tyske udgave af Wikipedia: *www.de.wikipedia.org/wiki/Rotationskörper* finder vi nedenstående formel, som vi straks afprøver på det simple eksempel:

$$\begin{aligned} V_y &= \pi \cdot \int_a^b x^2 \cdot f'(x) dx \\ &= \pi \cdot \int_2^5 x^2 \cdot (-1) dx = -39\pi \end{aligned}$$

På nær fortegnet ser det straks mere fornuftigt ud, men heller ikke den tyske udgave af Wikipedia udmærker sig ved at præcisere forudsætningerne om funktionen $f(x)$, så lad os forsøge at få bragt lidt ordnede forhold omkring emnet. Vi går ud fra, at sætningen om volumen af et omdrejningslegeme ved drejning om x-aksen er velkendt, og formulerer nu følgende sætning:

Sætning: Lad $f(x)$ være en monoton, differentiabel funktion med kontinuert afledet i intervallet $[a;b]$. Volumen af det omdrejningslegeme, der fremkommer, når $f(x)$ drejes 360° om y-aksen er givet ved formlen:

$$V_y = \pm \pi \cdot \int_a^b x^2 \cdot f'(x) dx$$

hvor + gælder for en voksende funktion, og – gælder for en aftagende funktion.

Bevis: Vi beviser sætningen for en aftagende funktion, idet vi benytter det kendte resultat fra drejning om x-aksen på $f(x)$'s inverse funktion, hvis eksistens er sikret gennem monotonien:

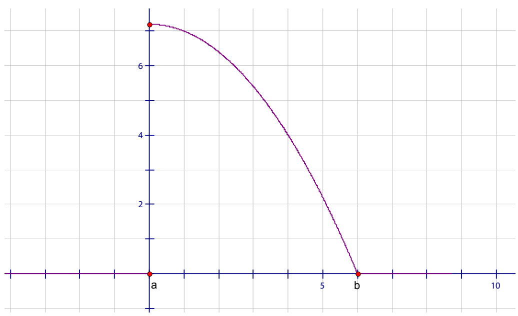
$$\begin{aligned} V_y &= \pi \cdot \int_{f(b)}^{f(a)} (f^{-1}(y))^2 \, dy \\ &= \pi \cdot \int_b^a (f^{-1}(f(x))^2 \cdot f'(x) dx \\ &= -\pi \cdot \int_a^b x^2 \cdot f'(x) dx \end{aligned}$$

hvor vi, som der fremgår, har brugt substitutionen $y = f(x)$.

Beviset for en voksende funktion går helt tilsvarende.

Hermed fik vi også forklaringen på det minus, der fremkom i eksemplet ovenfor.

Tilbage står stadig spørgsmålet om, hvorvidt formlen fra det danske Wikipedia-leksikon er grebet fuldstændig ud af luften!? Svaret er, at formlen faktisk er rigtig og anvendelig i et specialtilfælde. Lad os se på en aftagende funktion, af typen, som vist her:



Der skal – som det fremgår – gælde at $a = 0$ og $f(b) = 0$. Vi laver nu partiel integration på volumenformlen for en aftagende funktion, der roteres om y-aksen:

$$\begin{aligned} V_y &= -\pi \cdot \int_0^b x^2 \cdot f'(x) dx \\ &= -\pi \cdot [x^2 \cdot f(x)]_0^b + \pi \cdot \int_0^b 2x \cdot f(x) dx \\ &= \pi \cdot \int_0^b 2x \cdot f(x) dx \end{aligned}$$

Hermed er formlen således bevist i dette specialtilfælde. ◊